N° d'ordre : 160

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITE DE BORDEAUX I

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR-INGÉNIEUR

par

Jacques FLANDROIS

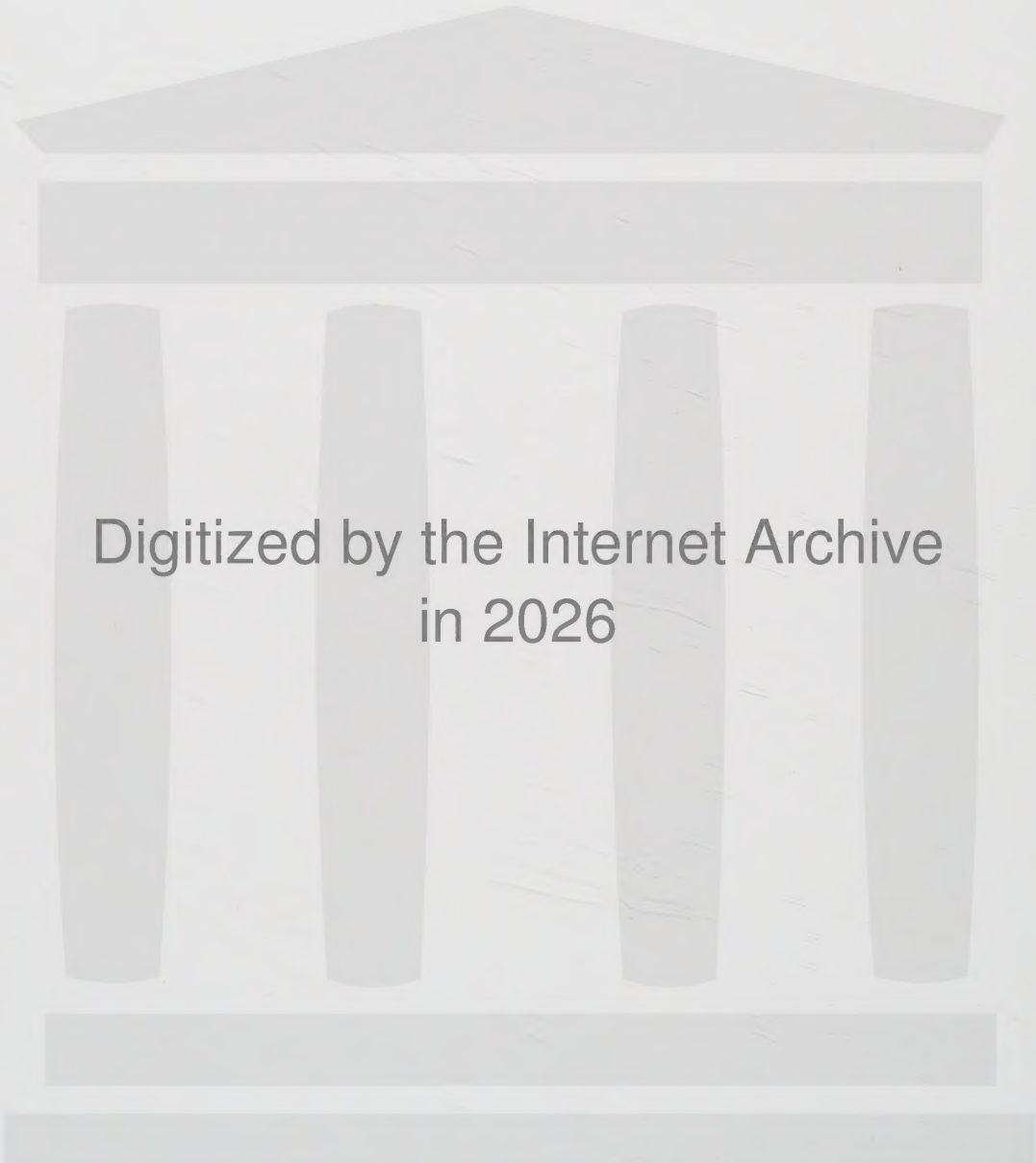
Ingénieur E.S.E.R.B.
Maître ès Sciences

Etude de la stabilisation d'un satellite destiné à la spectroscopie infrarouge par transformation de Fourier

Soutenue le 24 mars 1972 devant la Commission d'Examen :

M. SURDIN,	professeur	Président
M. LOUDETTE,	professeur	Examinateurs
M. LÉNA,	maître de conférences à Paris VII	Examinateurs

1972


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547317_0005

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION 1

1. SPECTROSCOPIE PAR TRANSFORMATION DE FOURIER 3
   1.1 Principe de la méthode 3
   1.2 Fonction théorique d'appareil et limites de résolution 5
   1.3 Calcul du spectre 6
   1.4 Principaux résultats sur le bruit dans les transformations de Fourier 7
   1.5 Déformations de la fonction d'appareil 8
   1.6 Précision de pointage 8
      1.6.1 *Précision de pointage nécessaire à l'interféromètre* 9
      1.6.2 *Précision de pointage du satellite* 10
      1.6.3 *Effet d'un déréglage du télescope* 10
      1.6.4 *Encombrement de l'interféromètre* 12
   1.7 Schéma de l'interféromètre 12
   1.8 Conclusion 15

2. SYSTÈME DE RÉFÉRENCE D'ATTITUDE 15
   2.1 Choix du système de référence d'attitude. Disposition générale 16
   2.2 Caractéristiques du diaphragme-miroir 17
   2.3 Détermination de la position de l'étoile 19
      2.3.1 *Loi fréquence — angle de dépointage* 19
      2.3.2 *Détermination des coordonnées de l'étoile* 23
   2.4 Schéma optique du senseur fin 23
      2.4.1 *Configuration adoptée* 23
      2.4.2 *Calcul de* ε_f 25
      2.4.3 *Calcul de* ß 25
   2.5 Schéma optique du senseur gros 25
      2.5.1 *Étude du système lentille-miroir parabolique* 26
      2.5.2 *Système de deux lentilles* 27
      2.5.3 *Conclusion sur le système optique du senseur gros* 29
   2.6 Conclusion 29

3. LES MANŒUVRES INITIALES 31
   3.1 Réduction des vitesses initiales 31
      3.1.1 *Type du système de jets de gaz* 32
      3.1.2 *Détermination de la masse du gaz et du temps nécessaires à la réduction des vitesses initiales* 33

3.2 Acquisition du Soleil 34
3.2.1 *Acquisition solaire grosse* 39
3.2.2 *Acquisition solaire fine* 41
3.3 Conclusion 43

4. LES GYROSCOPES DE COMMANDE DE MOMENT CINÉTIQUE 44
4.1 Choix des gyroscopes de commande de moment cinétique (GCMC) 44
4.2 Équations générales de mouvement 46
4.3 Loi de commande des vitesses angulaires des armatures des gyroscopes 48
4.3.1 *Problèmes posés par la recherche de la loi de commande* 48
4.3.2 *Première solution* 49
4.3.3 *Loi optimale de commande des vitesses angulaires des armatures* 49
4.3.4 *Cas particuliers* 51
4.4 Conclusion 54

5. FORMATION DU VECTEUR ERREUR $\bar{\varepsilon}$. LOI DE COMMANDE DES MOTEURS DES ARMATURES 54
5.1 Formation du vecteur erreur $\bar{\varepsilon}$ 56
5.2 Linéarisation des équations 58
5.3 Évaluation des paramètres 59
5.4 Détermination du type de la loi de commande des moteurs 59
5.5 Étude du correcteur proportionnel 61
5.5.1 *Modification de l'écriture des équations* 62
5.5.2 *Réponse de θ_z à un couple perturbateur sur l'axe OZ* 63
5.5.3 *Réponse de θ_y à un couple perturbateur sur l'axe OZ* 66
5.6 Correcteur proportionnel et intégral 70
5.6.1 *Réponse de θ_z à un couple perturbateur sur l'axe OZ* 70
5.6.2 *Réponse de θ_y à un couple perturbateur sur l'axe OZ* 71
5.7 Performances 73
5.7.1 *Réponse à un couple perturbateur échelon de 10^{-4} N-m sur l'axe OZ* 73
5.7.2 *Effet du bruit des senseurs* 77
5.7.3 *Effet des frottements secs des armatures des gyroscopes* 81
5.7.4 *Acquisition stellaire fine* 83
5.7.5 *Réorientation de 10°* 84

CONCLUSION 86

ANNEXES 87

ÉTUDE DE LA STABILISATION D'UN SATELLITE DESTINÉ A LA SPECTROSCOPIE INFRAROUGE PAR TRANSFORMATION DE FOURIER

J. Flandrois
Université de Bordeaux

INTRODUCTION

Le 4 octobre 1957 a marqué un tournant dans l'histoire des sciences avec le lancement du premier Spoutnik. Depuis lors, les satellites sur orbite terrestre ont considérablement accru les possibilités de l'homme – possibilités sur la terre elle-même par de nouvelles méthodes de prospection de ses ressources naturelles, par de meilleures prévisions météorologiques, par le développement des moyens de télécommunication – possibilités aussi dans la découverte et la connaissance de l'Univers qui nous entoure par le lancement de sondes interplanétaires en direction de Mars, de Vénus, par le débarquement de l'homme sur la Lune il y a deux ans...

L'étude des étoiles se trouve aussi grandement facilitée par l'avènement des satellites. Il est en effet désormais possible de s'affranchir de diverses limitations dues à la présence de l'atmosphère rerrestre : on sait que les meilleurs télescopes ne peuvent pas atteindre leur pouvoir séparateur théotique, et de loin : au Mont Palomar, au lieu des 0,03 seconde d'arc théorique, on n'atteint que 0,6 seconde et encore dans les meilleures conditions!

Cette première limitation est due à l'inhomogénéité optique de l'atmosphère : les rayons lumineux, avant de pénétrer dans le télescope, subissent des déviations liées aux variations de température qui changent constamment l'indice de réfraction de l'air; c'est ce qu'on appelle la turbulence de l'atmosphère et c'est ce qui est à l'origine du scintillement des étoiles.

De plus quand la lumière se propage à travers l'atmosphère comme à travers tout milieu optique, sa qualité se dégrade par suite de deux phénomènes : l'absorption et la diffusion. L'absorption transforme une partie des rayons incidents en une énergie d'une qualité différente. L'importance de cette absorption dépend de la longueur d'onde du rayonnement. Ainsi, si l'atmosphère est transparente aux rayonnements de longueurs d'onde visibles, on sait qu'elle est opaque aux rayonnements ultraviolets, cette absorption se manifestant par une couche d'ozone dans les couches supérieures de la stratosphère entre 40 et 60 kilomètres d'altitude.

De même si on étudie les radiations infrarouges, on constate une absorption de la plupart des infrarouges, due cette fois à la vapeur d'eau et au gaz carbonique contenus dans l'atmosphère. Cependant il existe des longueurs d'onde pour lesquelles les radiations ne sont que très peu atténuées : ce sont les « fenêtres atmosphériques ». La première s'étend du visible jusqu'à 1,3 μ. On note ensuite une bonne transmission autour de 1,65 μ, puis de 2,2 à 2,4 μ et au voisinage de 3,6 et de 4,8 μ. Ensuite deux fenêtres plus larges se situent entre 9 et 12 μ et entre 17 et 22 μ. Au-delà, l'atmosphère devient opaque jusqu'aux longueurs d'onde millimétriques [1].

Par ailleurs, dans l'infrarouge le rayonnement est encore altéré par un autre effet complémentaire : l'émission par les corps absorbants. On sait en effet qu'un corps porté à la température T rayonne suivant la loi de Planck dans toutes les directions. Les molécules de gaz de l'atmosphère sont échauffées par le rayonnement incident qu'elles absorbent en partie : cette énergie absorbée est réémise dans l'infrarouge; en effet le maximum d'émission a lieu pour une longueur d'onde λ_{max} reliée à T par la loi de Wien : $T\lambda_{max} \simeq 2900$, où T est en degrés Kelvin et λ_{max} en microns [2]. Il en résulte une diminution du contraste et une augmentation du bruit de fond.

Il est bien évident que la mise sur orbite d'un télescope permettra de s'affranchir de toutes ces causes d'erreurs, le rayonnement n'ayant plus à traverser l'atmosphère terrestre. L'étude des étoiles sera alors facilitée et il est probable qu'on pourra ainsi découvrir des étoiles froides qui n'émettent que faiblement dans le visible.

Ce problème de l'existence des étoiles froides revêt d'ailleurs une grande importance en astrophysique, dans le choix notamment entre plusieurs cosmologies [3 et 4]. Les astrophysiciens pensent que de telles étoiles représenteraient une des premières étapes du processus de formation des étoiles qui, se seraient formées à partir de nuages de poussière interstellaire par contraction gravitationnelle, l'énergie ainsi libérée se transformant en chaleur, d'où un échauffement progressif jusqu'à des températures élevées dépassant 30 000 °K. Selon cette hypothèse, on doit pouvoir trouver des masses préstellaires dans un état intermédiaire, à 800 ou à 1 000 °K par exemple. A ces températures, comme le montre la loi de Wien, le rayonnement est surtout dans l'infrarouge. Une étude complète des rayonnements infrarouges à partir d'un satellite sur orbite terrestre permettra donc sans doute d'apporter de nouveaux éléments à cette théorie de la contraction gravitationnelle. D'autre part si cette étude est effectuée avec une résolution suffisante, elle permettra d'analyser la composition des étoiles et d'y identifier certaines molécules comme HCl, HF, H_2O, CO_2, entre autres...

On peut envisager différentes techniques de spectroscopie interférentielle : les unes divisent le faisceau incident en de nombreux faisceaux interférents, comme les réseaux, l'étalon Fabry-Pérot; les autres ne font interférer que deux faisceaux, comme l'interféromètre de Michelson.

Les réseaux présentent l'avantage de donner directement le spectre à la sortie du détecteur. Ils ont par contre l'inconvénient de mal utiliser l'énergie de la source lumineuse dans le temps, car les différents éléments spectraux sont analysés successivement si on n'utilise qu'un détecteur; certes en utilisant un nombre n de détecteurs, on peut analyser n éléments spectraux simultanément; mais pour des raisons évidentes, ce nombre n est limité et ne permet pas en général d'étudier simultanément tous les éléments spectraux.

Au contraire, dans la méthode de spectroscopie par transformation de Fourier qui utilise un interféromètre de Michelson, tous les éléments spectraux sont étudiés simultanément. Par conséquent si le spectre de fréquence du bruit du détecteur est uniforme, et si le bruit de fond n'est pas augmenté par l'arrivée simultanée de tous les éléments spectraux, c'est-à-dire si le bruit des radiations reçues est négligeable devant le bruit du détecteur, ce qui est le cas des détecteurs actuels des infrarouges au-delà de 2 μ, la précision varie comme la racine carrée du temps d'exploration, quel que soit le nombre d'éléments spectraux étudiés. Par conséquent à rapport signal sur bruit égal, la durée de mesure est divisée par le nombre d'éléments spectraux [5].

De plus on peut montrer qu'à résolution égale, les exigences de précision de pointage du télescope sont beaucoup moins sévères avec un interféromètre de Michelson qu'avec des réseaux [6].

On peut encore ajouter un autre avantage en faveur de l'interféromètre de Michelson, c'est son gain en luminosité, qui est lié d'ailleurs à l'avantage précédent. L'interféromètre de Michelson peut en effet admettre un angle solide plus grand, d'où un diamètre du diaphragme plus grand, et une luminosité plus grande [7].

Le Chapitre 1 nous permettra de résumer les propriétés de la méthode de spectroscopie par transformation de Fourier, d'en voir une application possible à la spectroscopie infrarouge sur satellite et de définir les paramètres du système de stabilisation du satellite.

Les Chapitres suivants sont consacrés à l'étude du système de stabilisation du satellite. Dans le Chapitre 2 nous étudierons le système de référence d'attitude qui nous permettra de déterminer l'orientation du satellite dans un repère absolu.

Dans le Chapitre 3, nous verrons rapidement les premières manœuvres que doit effectuer un satellite après sa mise sur orbite : la réduction des vitesses initiales et l'acquisition solaire.

Alors nous pourrons, dans le Chapitre 4, montrer l'intérêt du choix des gyroscopes de commande de moment cinétique comme générateurs de couples et nous donnerons les équations de mouvement des gyroscopes à deux et à trois degrés de liberté à suspension d'Euler.

Le Chapitre 5 se placera sur un plan plus pratique et définira notamment les lois de commande des moteurs des armatures des gyroscopes.

1. SPECTROSCOPIE PAR TRANSFORMATION DE FOURIER

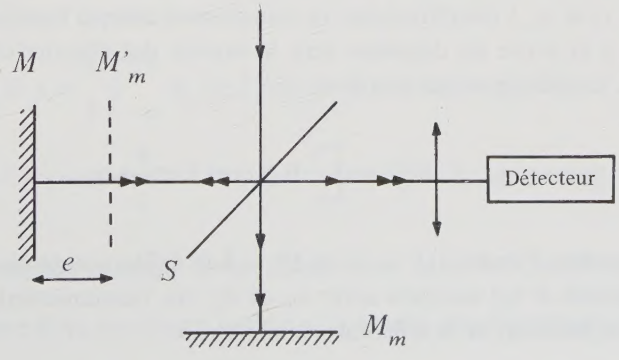
Le principe de la méthode de spectroscopie par transformation de Fourier est connu depuis la fin du siècle dernier. Mais il a fallu attendre les 15 à 20 dernières années pour qu'avec l'apparition des calculateurs à grande vitesse, il devienne possible d'étudier des spectres complexes et étendus. De nombreux et importants travaux sur la spectroscopie par transformation de Fourier ont alors été entrepris, notamment par P. Felgett, P. Jacquinot et P. et J. Connes. Nous allons en donner les résultats essentiels et essaierons d'en voir l'application à la spectroscopie stellaire à partir d'un satellite.

1.1 Principe de la méthode

Rappelons tout d'abord le principe de la méthode dans le cas d'une radiation monochromatique. On connaît l'interféromètre de Michelson schématisé par la Figure 1. Il se compose essentiellement d'une lame semi-transparente S appelée séparatrice et de deux miroirs M et M_m dont l'un, M_m, est mobile, le déplacement ayant lieu suivant la normale à ce miroir à la vitesse constante V. Pour simplifier, nous pouvons supposer qu'une lame compensatrice est collée sur la séparatrice.

Ainsi une radiation monochromatique de fréquence ν_0, de luminance B, arrivant sur l'interféromètre est d'abord divisée en deux parties égales, si on suppose l'absorption de la séparatrice nulle et

Figure 1.



son coefficient de réflexion égal à 0,5; elle est ensuite réfléchie par les deux miroirs, recombinée par la séparatrice, et reçue par le détecteur. Si M'_m est l'image de M_m, les chemins optiques des deux faisceaux diffèrent de la distance $2\,e$.

Au niveau du détecteur, les 2 ondes lumineuses correspondantes ont une amplitude proportionnelle à :

$$A_1 = \sqrt{\frac{B}{2}} \cos 2\pi\nu_0 t \qquad \text{et à} \qquad A_2 = \sqrt{\frac{B}{2}} \cos 2\pi\nu_0 \left(t - \frac{2e}{c}\right),$$

c étant la vitesse de la lumière.

La recomposition donne une amplitude proportionnelle à :

$$A = A_1 + A_2 = \sqrt{2\,B} \cos 2\pi\nu_0 \left(t - \frac{e}{c}\right) \cos 2\pi\nu_0 \frac{e}{c}.$$

Le détecteur reçoit alors un rayonnement de luminance L :

$$L = 2\,B \cos^2 2\pi\nu_0 \left(t - \frac{e}{c}\right) \cos^2 2\pi\nu_0 \frac{e}{c}.$$

On voit que si le miroir est animé d'une vitesse constante V, on a : $2e = Vt$ et la luminance reçue par le détecteur s'écrit :

$$L = 2\,B \cos^2 2\pi\nu_0 \left(1 - \frac{V}{2\,c}\right) t \cos^2 \pi\nu_0 \frac{V}{c} t.$$

La fréquence du premier facteur de L est très élevée puisque $\dfrac{V}{2c} \ll 1$; le détecteur n'est donc sensible qu'à sa valeur moyenne 1/2. Par contre le second facteur varie beaucoup plus lentement. Le signal de sortie du détecteur est proportionnel à :

$$B \cos^2 \pi\nu_0 \frac{V}{c} t = \frac{B}{2}\left(1 + \cos 2\pi\nu_0 \frac{V}{c} t\right).$$

Sa partie variable est appelée interférogramme : elle a une amplitude proportionnelle à la luminance B de la radiation reçue et une fréquence N égale à la fréquence lumineuse ν_0 multipliée par le rapport de la vitesse du miroir à celle de la lumière : V/c.

Une application numérique permet de préciser l'ordre de grandeur de N : si, dans le cas de la raie rouge du cadmium à 6434 Å, $V = 10^{-2}$ mm/s, on trouve $N = 15{,}5$ Hz.

Si, au lieu de recevoir une raie monochromatique, l'interféromètre reçoit un spectre quelconque $B\,(\nu)$ compris entre ν_1 et ν_2, l'interféromètre va transformer chaque raie élémentaire de la même façon et le signal obtenu à la sortie du détecteur sera la somme des signaux élémentaires correspondant à chacune des raies. L'interférogramme sera donc :

$$I\,(t) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} B\,(\nu) \cos 2\pi\nu \frac{V}{c} t\,d\nu,$$

si on appelle σ le nombre d'ondes $1/\lambda = \nu/c$ et $Vt = \delta$ la différence de marche des deux faisceaux et si on considère un spectre $B\,(\sigma)$ compris entre σ_1 et σ_2, un raisonnement analogue permet d'obtenir l'interférogramme en fonction de la différence de marche δ :

$$I(\delta) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} B(\sigma) \cos 2\pi\sigma\delta d\sigma.$$

Si maintenant on introduit la partie paire du spectre optique définie par :

$$B_p(\sigma) = \frac{1}{2}\Big[B(\sigma) + B(-\sigma)\Big],$$

on peut généraliser cette expression en écrivant :

$$I(\delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_p(\sigma) \cos 2\pi\sigma\delta d\sigma.$$

Cette dernière expression montre que l'interférogramme enregistré est la transformée de Fourier en cosinus du spectre étudié.

Par conséquent, pour reconstituer le spectre, il faut calculer la transformée de Fourier inverse $B_p(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\delta) \cos 2\pi\sigma\delta d\delta$. Toutefois on ne peut connaître entièrement l'interférogramme $I(\delta)$ pour δ variant de $-\infty$ à $+\infty$, mais de $-L$ à $+L$ seulement. Le spectre reconstitué ne sera donc pas $B_p(\sigma)$ mais $B'_p(\sigma)$ tel que :

$$B'_p(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\delta)\, D(\delta) \cos 2\pi\sigma\delta d\delta,$$

$D(\delta)$ étant une fonction créneau définie par :

$$D(\delta) = 1 \quad \text{si} \quad |\delta| \leqslant L$$
$$D(\delta) = 0 \quad \text{si} \quad |\delta| \geqslant L,$$

L'introduction de $D(\delta)$ amène à définir une fonction d'appareil.

1.2 Fonction théorique d'appareil et limites de résolution

On sait que la transformée de Fourier en cosinus du produit de deux fonctions paires est le produit de composition des transformées de Fourier de chacune des deux fonctions, ce qui se traduit symboliquement par :

$$B'_p(\sigma) = F_{\cos}[I(\delta)] \ * \ F_{\cos}[D(\delta)].$$

Or $F_{\cos}[I(\delta)] = B_p(\sigma)$ et on pose $F_{\cos}[D(\delta)] = f(\sigma)$. La luminance $B'_p(\sigma_0)$ calculée pour un nombre d'onde σ_0 est donc donnée par l'expression :

$$B'_p(\sigma_o) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} B_p(\sigma)\,[f(\sigma_o + \sigma) + f(\sigma_o - \sigma)]\, d\sigma;$$

$f(\sigma)$ est appelée la fonction d'appareil et c'est l'étude de cette fonction qui permet de calculer les limites de résolution.

Dans le cas de la fonction créneau $D(\delta)$ définie plus haut, on trouve que $f(\sigma) = \dfrac{\sin 2\pi\sigma L}{\pi\sigma}$ (Figure 2). Cette fonction part d'un maximum pour $\sigma = 0$ où elle prend la valeur $2L$, puis passe par un

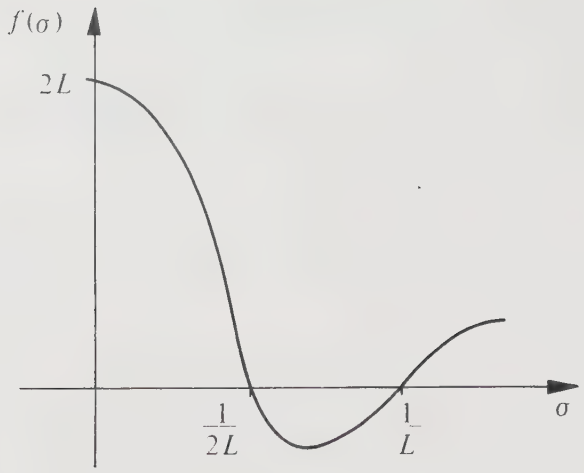


Figure 2.

premier zéro pour $\sigma = \frac{1}{2L}$. Il existe des extrémums secondaires importants; en effet le premier minimum qui a lieu pour $\sigma = \frac{0{,}714}{L}$, a la valeur de $-0{,}21 \times (2L)$. Une telle valeur est trop grande en spectroscopie parce qu'elle risquerait de masquer une raie voisine. Aussi, pour diminuer ces extrémums secondaires, on va apodiser cette fonction, c'est-à-dire : on va remplacer la fonction créneau $D(\delta)$ précédente par une fonction $A(\delta)$ telle que les extrémums secondaires de la fonction d'appareil correspondante soient moins importants. Mais l'apodisation présente l'inconvénient de faire baisser la résolution : en effet sans apodisation, la résolution $\partial\sigma$ est égale à $\frac{1}{2L}$ et si on utilise une fonction de pondération triangulaire telle que $A(\delta) = 1 - |\delta/L|$ pour $|\delta| < L$ et $A(\delta) = 0$ pour $|\delta| > L$, on montre que la résolution est sensiblement égale à $1/L$.

1.3 Calcul du spectre

Comme nous l'avons vu plus haut, il s'agit de calculer la transformée de Fourier en cosinus de l'interférogramme. Ce calcul peut être effectué de différentes façons, dont la plus intéressante est sans doute une méthode de calcul numérique. Notons en passant que dans le cas d'un interférogramme enregistré à bord d'un satellite, ce calcul du spectre qui est long peut évidemment être effectué au sol après transmission au sol de l'interférogramme.

La méthode de calcul numérique a l'avantage de permettre d'introduire très simplement une fonction de pondération dans le calcul du spectre, puisqu'il suffit de multiplier chaque valeur échantillonnée de l'interférogramme $I(\delta_i)$ par la valeur $A(\delta_i)$ de la fonction de pondération pour cette valeur δ_i. D'autre part, au cours des dix dernières années, on a fait de grands progrès dans la programmation des calculateurs pour la transformation de Fourier, ce qui a permis de réduire considérablement le temps de calcul, notamment grâce aux travaux de Cooley et Tukey [8] et de Forman [9]. Ainsi, le temps de calcul par la méthode de Forman est donné en secondes par $t = 2{,}93 \times 10^{-4}\, M \log_2 M$ où M est le nombre de points, alors que par une méthode conventionnelle dans les mêmes conditions, ce temps est $t = 1{,}63 \times 10^{-4}\, M^2$. Par exemple si $M = 4096$, par une méthode conventionnelle, il faut 2734 secondes tandis que par la méthode de Forman, il ne faut plus que 14,4 secondes [10].

Un des problèmes posés par le calcul numérique de la transformée de Fourier est le problème du choix du pas d'échantillonnage. Comme ce problème a été traité en détail par J. Connes [11], nous nous contenterons d'en donner les principaux résultats. On peut montrer que si h est le pas d'échantil-

lonnage de l'interférogramme $I(\delta)$, tous les spectres vont se répéter tous les $1/h$. Pour que le résultat soit utilisable, il ne faut pas qu'ils s'enchevêtrent. Par conséquent, dans le cas où on peut écrire $\sigma_M = n\Delta\sigma$, σ_M étant le nombre d'onde le plus élevé du spectre, n étant un entier et $\Delta\sigma$ l'intervalle spectral occupé, il suffit de prendre h égal à l'inverse du double de l'intervalle spectral occupé : $h = 1/(2\,\Delta\sigma)$; résultat plus connu sous la forme suivante : pour que le message contenu dans un signal soit récupérable après échantillonnage du signal, il faut prélever au moins deux points par période de la fréquence la plus élevée de ce signal (théorème de Shannon).

Si par contre $\sigma_M = (n + k)\,\Delta\sigma$, k étant fractionnaire, on est amené à introduire un autre intervalle spectral $\Delta\sigma'$ plus large que $\Delta\sigma$ et tel que $\Delta\sigma' = \frac{\sigma_M}{n}$. Le pas minimum h est alors : $h = 1/(2\,\Delta\sigma')$.

Ce choix étant fait, il reste à se poser la question du nombre de points à relever dans l'interférogramme en fonction du nombre d'éléments spectraux M. Si la différence de marche maximum atteinte est L, le nombre de points relevés est $m = L/h$. Donc dans le cas où $\sigma_M = n\Delta\sigma$, $h = 1/(2\,\Delta\sigma)$ et $m = 2\,L\,\Delta\sigma$. Sans apodisation $\partial\sigma = 1/2\,L$ et $m = M$. Par contre avec une apodisation $\partial\sigma = 1/L$ et $m = 2\,M$.

Si maintenant nous nous plaçons dans le cas le plus défavorable, c'est-à-dire : σ_M très légèrement inférieur à $2\,\Delta\sigma$, alors $\Delta\sigma' = \sigma_M \simeq 2\,\Delta\sigma$ et nous aurons $m = 2\,M$ si nous ne faisons pas d'apodisation et $m = 4\,M$ avec une apodisation. On obtient ainsi le nombre minimum de points à relever. Cependant, comme l'a montré J. Connes, le pas réel doit être choisi en tenant compte du bruit.

1.4 Principaux résultats sur le bruit dans les transformations de Fourier

Dans l'Introduction, nous avons rappelé brièvement un des intérêts de la méthode appliquée à l'infrarouge et plus généralement à tout domaine où le bruit propre du rayonnement détecté est faible devant le bruit du détecteur utilisé. On montre [12] que dans le cas où le spectre ne contient qu'une raie monochromatique, s'il est calculé à partir de toutes les valeurs de l'interférogramme (par une méthode analogique par exemple), le rapport signal sur bruit dans le spectre est donné par la formule:

$$\frac{s}{b} = \beta \frac{q}{\sqrt{Q}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mathcal{B}(0)}} \cdot \sqrt{T}.$$

où β est l'amplitude de la sinusoïde correspondant dans l'interférogramme à la raie monochromatique étudiée, q est la valeur moyenne de la fonction d'apodisation, Q la valeur moyenne de son carré, T la durée de la mesure et $\mathcal{B}(0)$ le spectre de puissance du bruit du détecteur autour de la fréquence à laquelle il est modulé; ce spectre de puissance du bruit est supposé uniforme dans une bande de fréquences correspondant à la bande passante du filtre passe-bas précédant l'enregistrement.

On peut comparer ce résultat avec celui obtenu pour les réseaux; on sait que, dans ce cas, on a :

$$\frac{s}{b} = \beta \cdot \frac{1}{\sqrt{\mathcal{B}(0)}} \cdot \sqrt{T}.$$

Comme en pratique $q/\sqrt{Q}$ est égal à 1 sans apodisation ou assez voisin de 1 avec apodisation (avec une fonction triangulaire par exemple, $q/\sqrt{Q} \simeq 0{,}87$), le résultat est sensiblement le même pour un élément spectral. Si, par contre, nous voulons étudier M éléments spectraux, pour avoir le même rapport signal sur bruit, il faut, dans le cas des réseaux et dans les mêmes conditions avec un seul détecteur, multiplier le temps de mesure par M; mais dans le cas de la spectroscopie par transformation de Fourier, pour un

temps MT, le rapport signal sur bruit devient égal à $\beta \cdot \frac{q}{\sqrt{Q}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mathcal{B}(0)}} \sqrt{MT}$, d'où le gain de $\sqrt{M}$ observé.

Cependant si, au lieu de calculer la transformée de Fourier en utilisant toutes les valeurs continues de l'interférogramme, on l'échantillonne, J. Connes a montré [13] que le rapport signal sur bruit est multiplié par le facteur $S = \frac{(s/b)_{réel}}{(s/b)_{max}}$ et on trouve :

$$S = \sqrt{\frac{\Phi_{\nu_o \tau}(0)}{\Phi_{\nu_o \tau}(h'/\tau)}} \qquad \text{avec} \qquad \Phi_{\nu_o \tau}(h'/\tau) = \frac{h'}{2\tau} \cdot \frac{\operatorname{sh}(h'/\tau)}{\operatorname{ch}(h'/\tau) - \cos(2\pi \nu_o \tau\, h'/\tau)}$$

h' étant le quotient du pas h par la vitesse du miroir mobile et τ la constante de temps du filtre passe-bas précédant l'enregistreur.

L'examen de la variation de S en fonction de h'/τ montre que la diminution du rapport signal sur bruit est faible si le pas h' est choisi voisin de la constante de temps : $S = 0{,}95$ si $h' = \tau$. Il est donc sans intérêt de prendre $h' < \tau$. Par contre dès que h'/τ devient supérieur à 1, la décroissance de S est très rapide : pour $h'/\tau = 5$, $S = 0{,}6$.

Cette diminution du rapport signal sur bruit peut être évitée si on choisit une méthode d'enregistrement statique. Cette méthode consiste à avancer le miroir mobile très rapidement de la distance correspondant au pas choisi h, puis à le laisser immobile pendant la durée de l'enregistrement pendant laquelle on intègre le signal donné par le détecteur. Le rapport signal sur bruit obtenu alors est le même que dans le cas de l'enregistrement continu si le temps de déplacement du miroir est petit devant le temps d'arrêt. Plusieurs réalisations pratiques ont déjà été faites et ont donné entière satisfaction; l'une d'elles permet même d'atteindre la différence de marche de 1,80 m [14 et 15].

1.5 Déformations de la fonction d'appareil

Les résultats précédents sont valables pour un instrument parfait et un faisceau d'étendue nulle. En fait les défauts de l'interféromètre et l'étendue du faisceau peuvent déformer la fonction d'appareil. Toutes ces questions ont été longuement traitées. Rappelons que l'erreur dans la détermination de la différence de marche nulle est faible si le spectre étudié est assez étendu et que l'erreur dans la mesure de la différence de marche peut être minimisée en enregistrant simultanément l'interférogramme d'une raie de référence. Si on veut étudier des spectres à très haute résolution, nécessitant par conséquent une grande différence de marche, la raie de référence devra être très fine; un laser est, au sol, la solution idéale, mais sa consommation d'énergie est encore trop élevée pour un satellite. D'autre part une erreur dans le parallélisme des miroirs peut être complètement éliminée en employant des miroirs tétraédriques [16].

Un point cependant mérite d'être étudié avec plus de détails, car les caractéristiques du système de commande d'attitude de notre satellite en dépendent, c'est la précision de pointage nécessaire du télescope.

1.6 Précision de pointage

Une résolution donnée ne peut être atteinte que si l'angle maximum de dépointage est inférieur à une certaine valeur. Cette valeur est relativement grande pour l'interféromètre de Michelson, beaucoup plus grande que pour les réseaux. Nous allons déterminer la relation entre l'angle de dépointage et la résolution. Mais d'autres raisons nous conduisent également à limiter cet angle : ce sont l'éventualité d'un déréglage du télescope et les problèmes d'encombrement de l'interféromètre.

1.6.1 PRÉCISION DE POINTAGE NÉCESSAIRE A L'INTERFÉROMÈTRE

Pour déterminer la relation entre l'angle de dépointage maximum et la résolution maximum, nous allons considérer deux rayons 1 et 2 (Figure 3) arrivant sur l'interféromètre. Le rayon 1 arrive exactement suivant l'axe optique. Il est divisé en deux par la séparatrice et ces deux rayons arrivent sur le détecteur avec une différence de marche δ. Le rayon 2 forme avec le rayon 1 un angle α; il est divisé en deux rayons qui sont reçus par le détecteur avec une différence de marche Δ. A l'aide d'un petit calcul géométrique, on peut montrer que sans la lentille l, on a la relation $\Delta = \dfrac{\delta}{\cos \alpha}$ pour un détecteur supposé parfaitement plat; mais comme en pratique le détecteur est toujours précédé d'une lentille puisque le bruit du détecteur est proportionnel à la racine carrée de sa surface que l'on a par conséquent intérêt à la réduire le plus possible, nous avons en fait $\Delta = \delta \cos \alpha$.

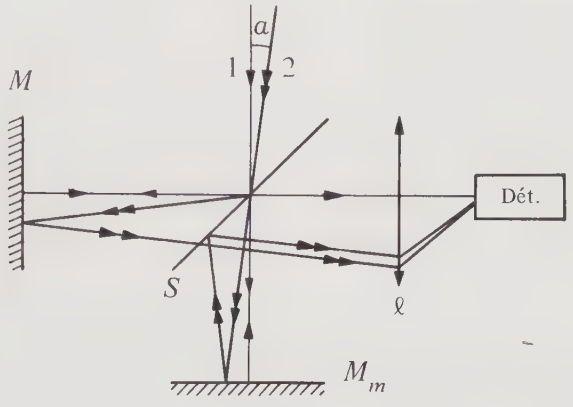


Figure 3.

Dans le cas d'un interféromètre à bord d'un satellite, α ne peut pas être connu; mais le système de commande d'attitude doit maintenir α toujours inférieur à une certaine valeur α_M que nous allons déterminer en fonction de la résolution désirée.

Supposons que nous étudions une radiation monochromatique de nombre d'onde σ_0. L'interférogramme enregistré dans des conditions de pointage parfaites est $I(\delta) = B \cos 2\pi\sigma_0\delta$. Mais si le dépointage est α pendant la durée de l'enregistrement, il s'écrit alors : $I(\delta) = B \cos (2\pi\sigma_0\delta \cos \alpha)$. Comme α est inconnu, le calcul du spectre se fait ensuite en considérant la différence de marche δ et non $\delta \cos \alpha$:

$$B_p = \int_{-L}^{+L} B \cos (2\pi\sigma_o\delta \cos \alpha) \cos 2\pi\sigma\delta d\delta.$$

Tout se passe donc comme si le nombre d'onde σ_0 était devenu $\sigma'_0 = \sigma_0 \cos \alpha$. On observe donc un glissement du spectre vers des nombres d'onde plus bas. Puisque α peut varier au cours des mesures, la valeur maximum tolérable pour α est donc celle pour laquelle le glissement est inférieur ou au plus égal à la limite de résolution $\partial\sigma$, c'est-à-dire $\sigma'_0 - \sigma_0 \leqslant \partial\sigma$ ou, si R est la résolution $\dfrac{\sigma_0}{\partial\sigma}$, $1 - \cos \alpha_M \leqslant \dfrac{1}{R}$, ou, puisque α est petit, $\alpha_M^2 \leqslant \dfrac{2}{R}$.

Ce résultat est à rapprocher de celui obtenu dans le cas des faisceaux de grande étendue qui rendent nécessaire l'utilisation d'un diaphragme : on montre [7] que le meilleur compromis luminosité-résolution est obtenu quand l'angle solide Ω limité par le diaphragme est relié à la résolution R par la relation : $\Omega R = 2\pi$.

1.6.2 PRÉCISION DE POINTAGE DU SATELLITE

Nous pouvons maintenant déterminer la précision de pointage du satellite. En effet l'interféromètre reçoit la lumière de l'étoile par l'intermédiaire d'un télescope dont le rôle est essentiellement de transformer un faisceau parallèle peu intense et de grande section en un faisceau parallèle plus intense et de section plus faible.

Si D est le diamètre du miroir primaire du télescope et d le diamètre utile du miroir secondaire, il est aisé de montrer par une construction géométrique que l'angle maximum de dépointage du télescope ε_M est relié à α_M par la relation : $\varepsilon_M = \frac{d}{D}\alpha_M$. Si $\sigma_{\max}$ est le nombre d'onde maximum du spectre étudié et $\partial\sigma$ la limite de résolution, cette relation peut s'écrire : $\varepsilon_M = \frac{d}{D}\sqrt{\frac{2\,\partial\sigma}{\sigma_{\max}}}$. La Figure 4 donne les exigences de pointage de l'interféromètre et du télescope (avec $d/D = 1/20$) en fonction de la limite de résolution désirée et des longueurs d'onde étudiées.

Ainsi si on veut étudier les spectres stellaires dans la bande de 2,2 à 7,5 μ, c'est-à-dire de 4550 à 1333 cm^{-1}, bande qui a l'avantage d'inclure 3 fenêtres atmosphériques relativement étroites (entre 2,2 et 2,4 μ, et au voisinage de 3,6 et 4,8 μ), ce qui peut permettre une éventuelle vérification des résultats par ceux qu'on peut déjà obtenir dans ces fenêtres à partir du sol, et si on veut atteindre une limite de résolution de 0,01 cm^{-1}, on trouve $\alpha_M = 7'\,14''$ et avec $d/D = 1/20$, $\varepsilon_M = 22''$.

Avec une limite de résolution de 0,1 cm^{-1}, déjà appréciable car la résolution minimum est alors de 13333, il suffirait de pointer le satellite avec une précision supérieure à la minute d'arc! Ces chiffres montrent clairement une des supériorités de la spectroscopie par transformation de Fourier sur la spectroscopie par réseaux : les exigences du pointage sont considérablement moins sévères à résolution égale. En effet avec un réseau de constante 10 μ, la précision de pointage nécessaire pour obtenir dans les mêmes conditions une limite de résolution minimale de 0,1 cm^{-1} sur la bande 2,2 à 7,5 μ est de 0,5″ si le diamètre du cercle de Rowland est de 1 m.

1.6.3 EFFET D'UN DÉRÉGLAGE DU TÉLESCOPE

Le calcul que nous avons fait pour déterminer ε_M suppose implicitement que le télescope est parfaitement réglé, les deux foyers image et objet des miroirs primaire et secondaire coïncidant parfaitement. En général ce n'est pas le cas, surtout à cause des contraintes thermiques. Ainsi si e est la distance entre les 2 foyers, les formules de Newton permettent de montrer qu'un faisceau parallèle arrivant sur le télescope parallèlement à son axe optique en sort contenu dans un angle solide :

$$\Omega_{tel} \simeq \pi \frac{e^2 d^2}{4f^4}$$

où d est le diamètre du faisceau de sortie du télescope et f la distance focale du miroir secondaire; le rayon le plus écarté de l'axe optique va donc former l'angle $i = \frac{ed}{2f^2}$ avec l'axe optique. Pour qu'il n'y ait pas de baisse de la résolution, il faut dans la formule $\varepsilon_M = \frac{d}{D}\alpha_M$ remplacer α_M par $\alpha'_M = \alpha_M - i$.

Ainsi, si $e = 0{,}1$ mm, $d = 5$ cm et $f = 10$ cm, on trouve : $i = 51''$, ce qui n'est pas négligeable, étant donné le faible déréglage considéré. Il semble donc nécessaire de diaphragmer le ou les détecteurs de l'interféromètre pour éliminer les rayons trop obliques en cas de déréglage trop important.

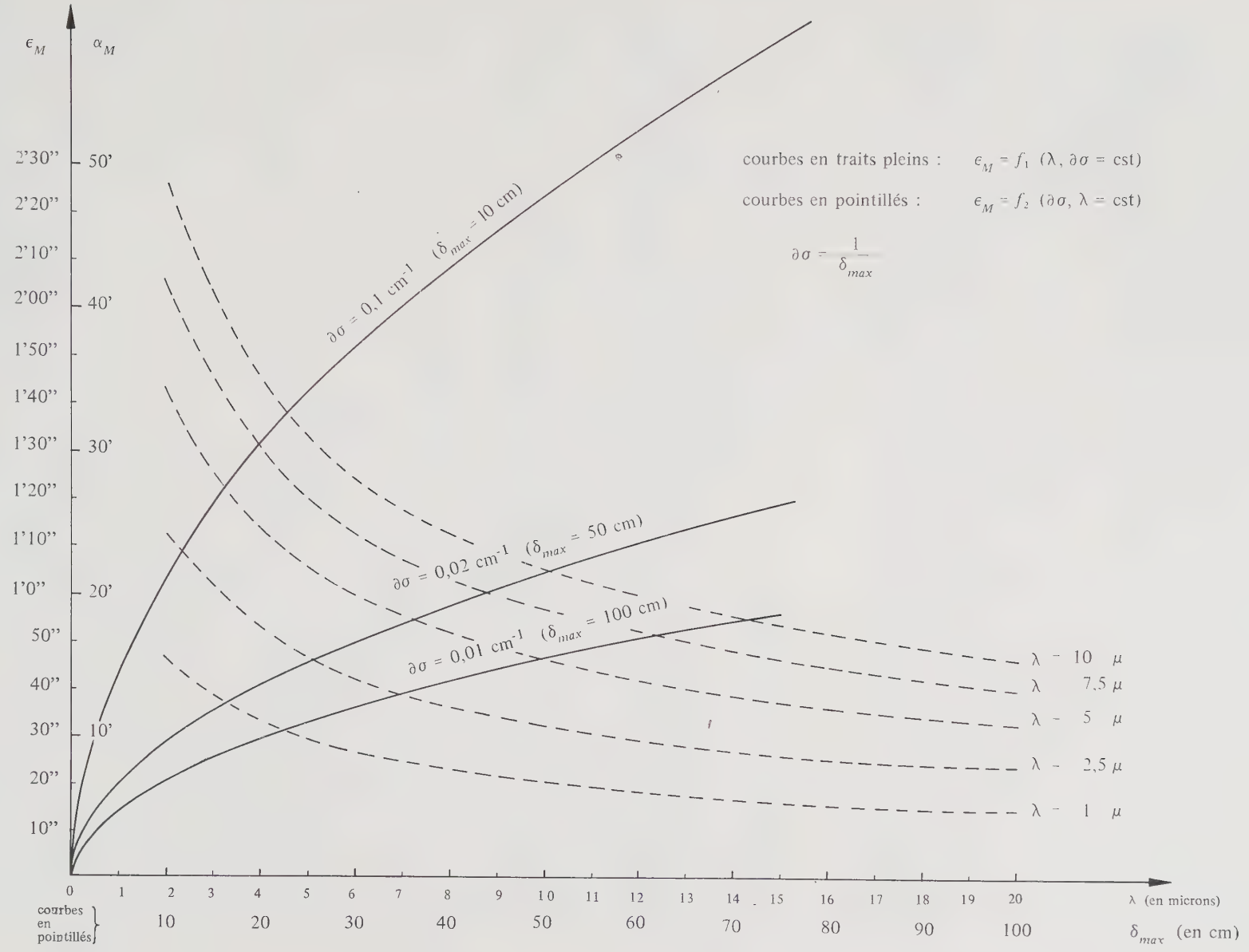

ϵ_M
α_M
2'30"
2'20"
2'10"
2'00"
1'50"
1'40"
1'30"
1'20"
1'10"
1'0"
50"
40"
30"
20"
10"
50'
40'
30'
20'
10'
courbes en traits pleins : $\epsilon_M = f_1\ (\lambda, \partial\sigma = \text{cst})$
courbes en pointillés : $\epsilon_M = f_2\ (\partial\sigma, \lambda = \text{cst})$
$\partial\sigma = \frac{1}{\delta_{max}}$
$\partial\sigma = 0{,}1\ \text{cm}^{-1}$ ($\delta_{max} = 10$ cm)
$\partial\sigma = 0{,}02\ \text{cm}^{-1}$ ($\delta_{max} = 50$ cm)
$\partial\sigma = 0{,}01\ \text{cm}^{-1}$ ($\delta_{max} = 100$ cm)
$\lambda = 10\ \mu$
$\lambda = 7{,}5\ \mu$
$\lambda = 5\ \mu$
$\lambda = 2{,}5\ \mu$
$\lambda = 1\ \mu$
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
λ (en microns)
courbes en pointillés
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
δ_{max} (en cm)

Figure 4.

1.6.4 ENCOMBREMENT DE L'INTERFÉROMÈTRE

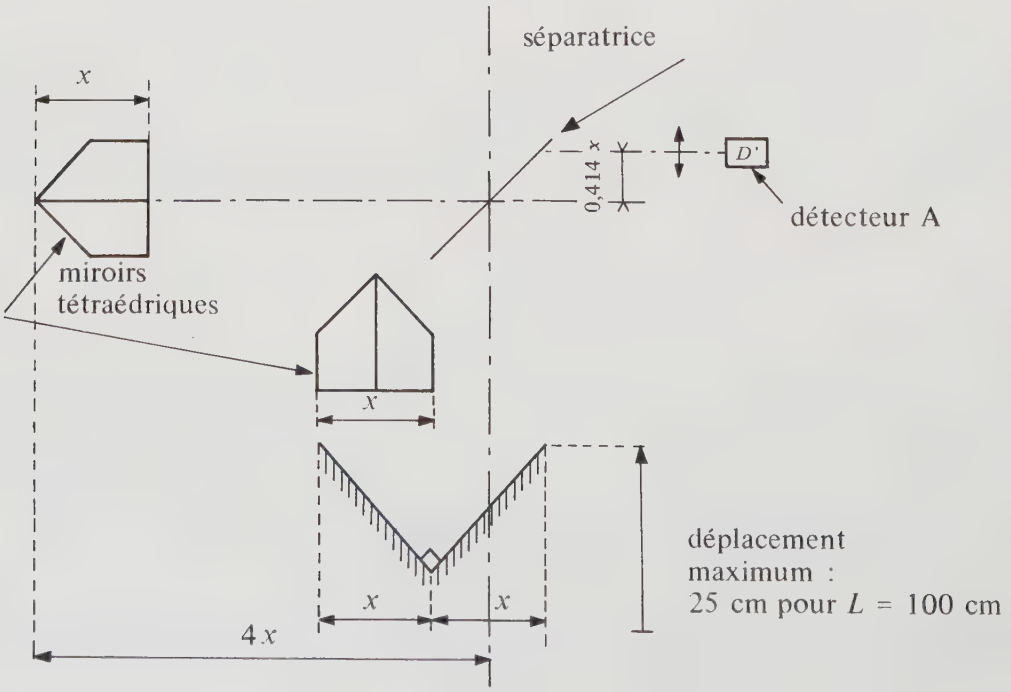
Un autre problème conduit à limiter le plus possible ε_M : c'est le problème de l'encombrement de l'interféromètre. On conçoit en effet que plus ε_M est grand, plus la séparatrice et les miroirs de l'interféromètre doivent être grands. La Figure 5 permet de préciser le problème : établie dans le cas où le faisceau de sortie du télescope, supposé parallèle, a un diamètre de 5 cm, elle montre en effet la dimension élémentaire minimum x que doivent avoir les différentes pièces de l'interféromètre en fonction de la précision de pointage du télescope pour une résolution et une longueur d'onde données. L'écartement maximum des rayons réfléchis par le miroir mobile de l'interféromètre dépend de la différence de marche maximum atteinte L; et L est relié à la longueur d'onde étudiée et à la précision de pointage ε_M par la relation $\varepsilon_M = \frac{d}{D}\sqrt{\frac{2}{R}}$ avec $R = \frac{\sigma}{\partial\sigma} = \frac{L}{\lambda}$ si on fait une apodisation. C'est ce qui explique que l'on a un réseau de courbes pour différentes valeurs de λ.

D'autre part on peut remarquer que si ε_M diminue on pourra augmenter L. Mais pour des raisons mécaniques évidentes, L est limité; ceci explique le fait que le réseau de courbes est limité par les courbes en pointillés, $L = 100$ cm, $L = 50$ cm et $L = 25$ cm. Ainsi pour $\varepsilon_M = 10''$, comme on ne prendra pas $L > 100$ cm, et qu'on étudie des radiations de longueur d'onde supérieures à 2,2 μ, la Figure 5 montre qu'il suffit de prendre $x = 5{,}75$ cm.

1.7 Schéma de l'interféromètre

a) Il semble souhaitable de limiter le déplacement du miroir mobile : en effet avec $L = 100$ cm, le déplacement du miroir dans le cas d'un interféromètre habituel est de 50 cm, ce qui est trop élevé pour son utilisation sur un satellite. Aussi est-il suggéré d'utiliser plusieurs réflexions sur le miroir mobile suivant le schéma de la Figure 6, par exemple, où la différence de marche atteinte est de 100 cm pour un

Figure 6a : Schéma de l'interféromètre, vu en coupe dans un plan contenant l'axe optique du télescope. Détecteur A : détecteur du faisceau de référence commandant le déplacement du miroir mobile (son axe optique est à 0,414 x cm au-dessous d'un plan parallèle contenant l'axe optique du télescope).



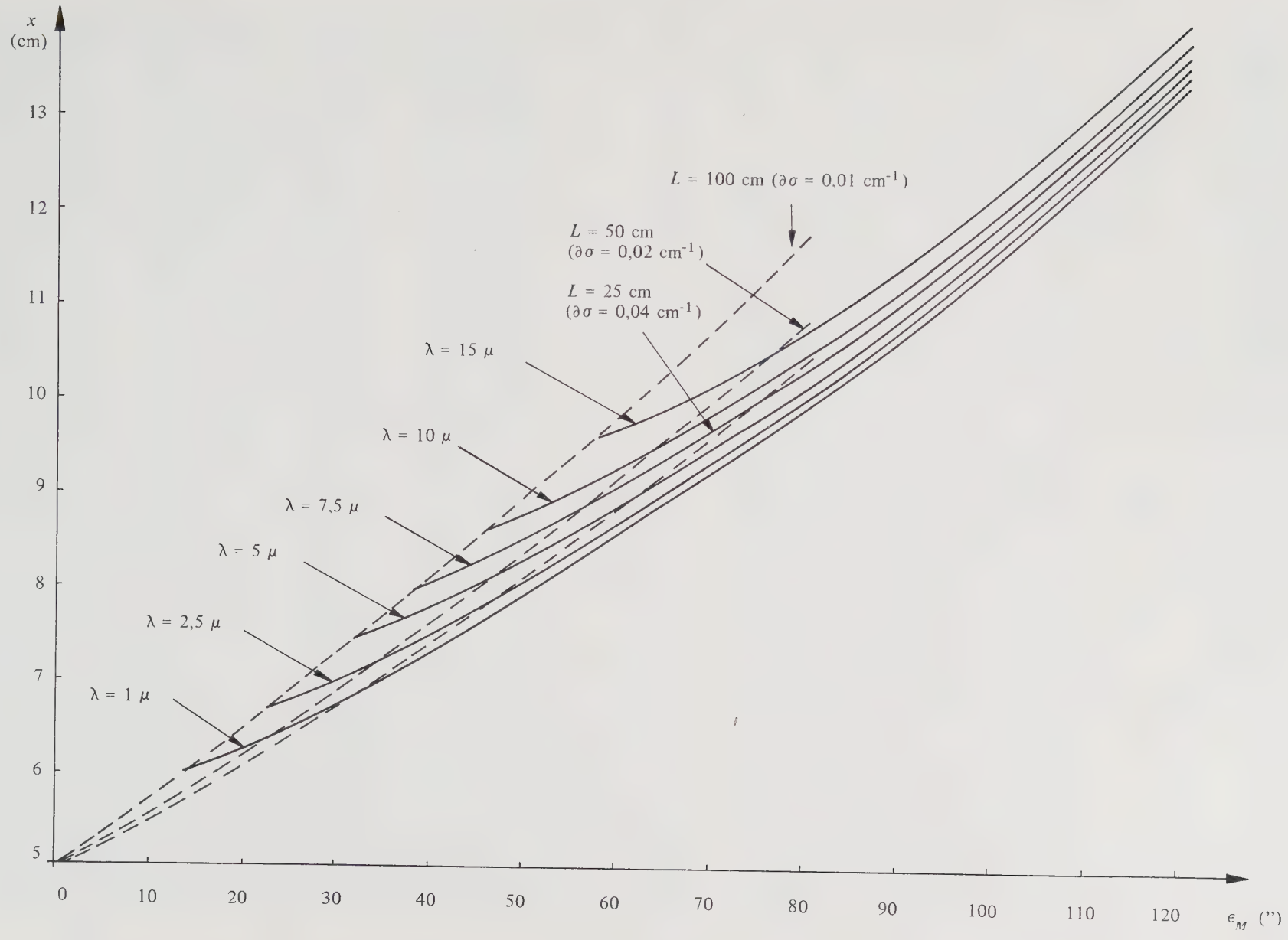

x
(cm)
13
12
11
10
9
8
7
6
5
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
ϵ_M (")
L = 100 cm (∂σ = 0,01 cm⁻¹)
L = 50 cm
(∂σ = 0,02 cm⁻¹)
L = 25 cm
(∂σ = 0,04 cm⁻¹)
λ = 15 μ
λ = 10 μ
λ = 7,5 μ
λ = 5 μ
λ = 2,5 μ
λ = 1 μ

Figure 5.

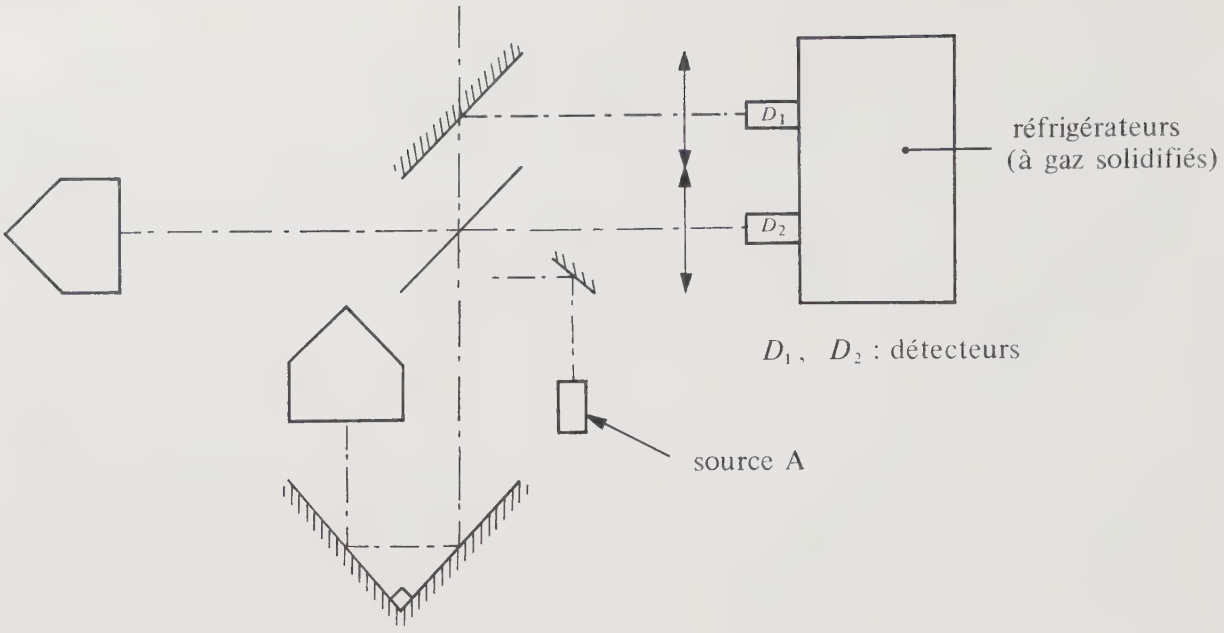


Figure 6b : Schéma de l'interféromètre, vu de dessus.
Source A : source monochromatique du faisceau de référence (axe optique à 1,414 x cm d'un plan contenant l'axe optique du télescope).

déplacement du miroir de 25 cm. L'inconvénient de ce système est d'obliger à employer un miroir mobile de dimensions deux fois plus grandes, donc de masse et d'inertie approximativement doubles, ce qui peut être gênant pour un avancement pas à pas.

b) On utilise deux miroirs tétraédriques pour renvoyer les deux faisceaux sur la séparatrice. On connaît le principal intérêt de ce type de miroirs qui est de renvoyer un faisceau parallèle parallèlement à lui-même et d'être insensibles aux petites rotations autour de leur sommet [16]. Notre schéma permet d'utiliser aussi une autre propriété : le faisceau réfléchi est symétrique du faisceau incident par rapport au rayon passant par le sommet. Cette propriété permet de séparer le faisceau incident et le faisceau réfléchi au prix, il est vrai, d'un encombrement un peu plus important. Mais ceci permet d'utiliser toutes les radiations tombant sur l'interféromètre et non la moitié comme pour les interféromètres habituels, à la condition toutefois d'utiliser un second détecteur.

c) La section droite du faisceau issu du télescope est circulaire. Par conséquent, si les divers éléments de l'interféromètre, séparatrice, miroirs, sont rectangulaires, il devient possible de placer le faisceau de référence dans les angles, ce qui permettra d'éviter un mélange du faisceau de référence avec le faisceau à étudier.

d) On sait enfin que le bruit des détecteurs infrarouges, généralement constitués de matériaux semi-conducteurs, peut être réduit si on les refroidit [17]. Nous ne reviendrons pas sur le principe de la détection; mais il est important de noter que si on veut détecter des rayonnements de grande longueur d'onde, la différence des niveaux d'énergie entre la bande de valence et la bande de conduction du matériau du détecteur doit être faible. On refroidit le détecteur pour éviter le passage des électrons d'une bande dans une autre par agitation thermique.

Ainsi si nous voulons étudier les spectres stellaires dans la bande de 2,2 à 7,5 μ, le détecteur peut être au germanium dopé N à l'or et refroidi à 77 °K [17 et 18]. Le problème du refroidissement à une aussi basse température peut être résolu en sublimant un gaz solidifié. Les avantages de cette méthode sont nombreux : grande fiabilité, aucune partie mobile, pas de consommation d'énergie, pas de problème dû à l'impesanteur, poids relativement faible (U.E. Gross et A.I. Weinstein citent par

exemple : pour une puissance frigorifique de 100 mW à 77 °K obtenue pendant un an avec du méthane, le gaz solidifié et l'isolant pèsent moins de 16 kg, l'enveloppe extérieure étant à la température de 300 °K [19]). Le principe de la stabilisation de la température est simple : il suffit de maintenir la pression de vapeur autour du gaz solidifié à une valeur constante (9 torrs pour le méthane à 77 °K), système d'autant plus simple à réaliser que l'environnement extérieur est le vide spatial.

1.8 Conclusion

Cette étude rapide de l'application de la spectroscopie infrarouge par transformation de Fourier à un télescope orbital nous a permis de voir les nombreux avantages de cette méthode, dont le plus important est sans doute un gain considérable de temps de mesure; d'où la possibilité d'effectuer un plus grand nombre de mesures à durée de vie du satellite égale. Un autre avantage très important, c'est que la méthode nécessite une précision de pointage nettement moindre que la spectroscopie par réseaux. Nous nous fixons ainsi pour la conception du système de stabilisation une précision de l'ordre de 15 secondes d'arc pour les 2 axes perpendiculaires à l'axe optique du télescope; ce qui permet d'atteindre des résolutions très élevées et surtout de limiter les dimensions de l'interféromètre. La précision autour de l'axe optique du télescope n'intervient pas; mais pour faciliter les manœuvres de réorientation du satellite, il est souhaitable de connaître l'attitude du satellite selon les 3 axes; aussi prendrons-nous la précision autour de l'axe optique du télescope de l'ordre de la minute d'arc au plus. Ces précisions doivent être maintenues pendant toute la durée de la mesure, qui s'effectue en général pendant la moitié d'une orbite, c'est-à-dire environ 45 minutes si l'orbite choisie se situe à 500 km d'altitude environ.

2. SYSTÈME DE RÉFÉRENCE D'ATTITUDE

Le système de référence d'attitude est un élément très important dans la commande d'attitude d'un satellite astronomique. Pour une bonne part, la précision de l'attitude en dépend. Il convient donc de l'étudier avec soin. L'orientation d'un satellite par rapport à un repère absolu peut être donnée de différentes façons, que l'on peut classer schématiquement en plusieurs grandes catégories : les systèmes à référence inertielle, ceux à référence stellaire et ceux qui sont basés sur la connaissance de couples extérieurs.

De la première catégorie découle directement ce qu'on appelle la « navigation inertielle » [20]. Une plate-forme à 3 degrés de liberté est stabilisée par gyroscopes. Si l'équilibrage statique et dynamique est parfait et s'il n'y a aucun frottement, la plate-forme garde une orientation fixe dans un repère absolu. Ceci n'étant jamais rigoureusement réalisé, on constate une dérive qui se chiffre pour de très bons gyroscopes à un centième de degré par heure; ce qui montre qu'un tel système est toujours insuffisant s'il est employé seul dans un satellite astronomique.

La deuxième catégorie de senseurs d'attitude fait le point en repérant la direction de certaines étoiles déterminées à l'avance. Nous avons ici deux possibilités : on peut choisir un certain nombre d'étoiles parmi les plus brillantes et repérer leur direction; on monte alors une série de senseurs stellaires sur une plate-forme articulée et on utilise un calculateur de transformation d'axes pour déterminer les angles de dépointage dans les axes du satellite. On peut aussi utiliser un senseur d'étoile visant l'étoile à étudier; les angles de dépointage autour des deux axes perpendiculaires à l'axe optique du télescope sont alors donnés directement et le troisième angle est déterminé en visant une étoile de référence, mais avec une précision beaucoup plus faible. Dans ce dernier cas les manœuvres de réorientation peuvent être effectuées en utilisant un système annexe à gyroscopes calés périodiquement.

Les autres méthodes de détermination de l'attitude d'un satellite ne sont pas suffisamment précises pour un satellite astronomique.

2.1 Choix du système de référence d'attitude - Disposition générale

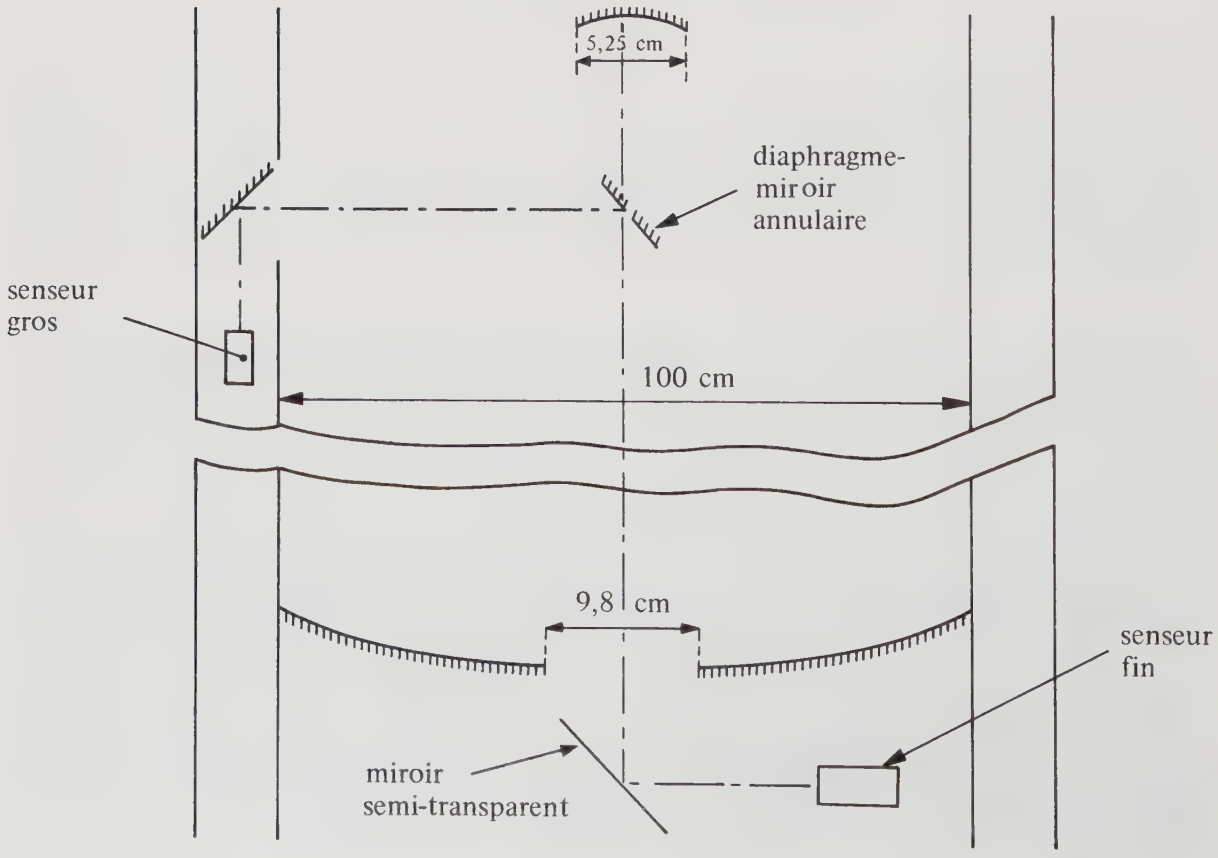
Pour des raisons de simplicité, nous avons choisi de stabiliser le télescope en nous repérant sur l'étoile étudiée. Pour cela, nous allons prélever une partie de la lumière reçue par le télescope que nous supposerons être du type Grégorien.

Cette méthode présente un inconvénient : on perd ainsi, pour les mesures, une partie de la lumière de l'étoile. Par contre, cette méthode permet de corriger automatiquement un déréglage de l'alignement des axes optiques des miroirs du télescope.

Ainsi à l'aide d'une lame semi-transparente placée entre l'ouverture du miroir primaire et l'interféromètre, nous envoyons une petite partie du faisceau sur le senseur « fin » que nous avons situé entre le miroir primaire et l'interféromètre; cette disposition permet de refroidir les détecteurs du senseur fin à l'aide du même système frigorifique que celui utilisé pour l'interféromètre (Figure 7).

Cependant ceci nous crée une première difficulté : en effet il est nécessaire de limiter le champ de vision de l'interféromètre pour diminuer le bruit de fond et pour éviter éventuellement des erreurs dues à la présence d'étoiles voisines, et aussi pour des questions géométriques. Par conséquent le senseur

Figure 7 : Disposition générale des senseurs visant l'étoile étudiée (échelle non respectée).



fin aura un champ de vision faible : nous l'avons choisi égal à $\pm$ 2 minutes d'arc. Les dimensions correspondantes du diamètre de l'ouverture du miroir primaire et du diamètre du miroir secondaire sont alors respectivement de 9,8 cm et 5,25 cm si le diamètre du miroir primaire est de 100 cm, sa distance focale de 200 cm et la distance focale du miroir secondaire de 10 cm.

La petitesse de ce champ de vision risque de créer beaucoup de difficultés pour l'acquisition de l'étoile. Aussi faut-il chercher à augmenter ce champ. C'est pour cela que nous avons placé au foyer image du miroir primaire un diaphragme annulaire incliné de 45° sur l'axe optique du télescope et réfléchissant totalement la lumière d'une étoile dépointée de plus de 2 minutes, environ, vers la paroi du satellite. La lumière est alors reçue par un senseur d'étoile que nous appellerons senseur « gros ». Pour réduire les dimensions du faisceau et son déplacement au niveau de la paroi du satellite, nous sommes amenés à placer un dispositif optique entre le diaphragme-miroir et le corps du satellite; nous l'étudierons au paragraphe 2.5. Auparavant, nous allons étudier les caractéristiques du diaphragme-miroir.

2.2 Caractéristiques du diaphragme-miroir

Comme nous venons de le voir, le but du diaphragme est double :

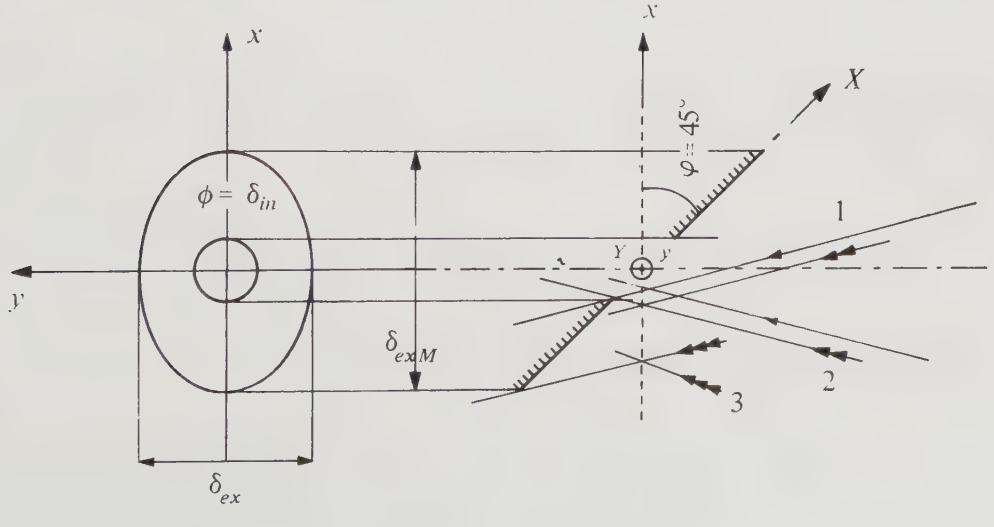
- limiter le champ de vision de l'interféromètre et du senseur fin;
- permettre au senseur gros d'utiliser la lumière issue du miroir primaire du télescope.

Des considérations géométriques font adopter un diaphragme dont la projection sur le plan focal image du miroir primaire du télescope (plan xOy de la Figure 8) comprend un cercle intérieur et une ellipse extérieure. Nous allons rapidement en voir les dimensions à l'aide de la Figure 8.

Si nous appelons θ_f le champ de vision moyen du senseur fin et F la distance focale du miroir primaire, nous voyons immédiatement que $\delta_{in} = 2\ F\ \theta_f$, c'est-à-dire $\delta_{in} = 2{,}4$ mm si $F = 2$ m et $\theta_f = 2'$. Nous pouvons remarquer que pour un angle de dépointage voisin de θ_f, le diaphragme va moduler l'intensité du faisceau suivant la position de l'image de l'étoile dans le plan xOy et alors nous aurons une répartition de la lumière entre les deux senseurs. Déterminons les angles de dépointage pour lesquels nous n'avons pas de modulation.

a) Supposons que l'image de l'étoile soit sur l'axe Oy. Alors nous voyons que si $\theta < \theta_f$, le senseur fin et l'interféromètre reçoivent toute la lumière; et si $\theta > \theta_f$, c'est le senseur gros qui reçoit tout.

Figure 8. (À gauche, la mention $\phi = \delta_{in}$ se rapporte au diamètre du cercle intérieur.)



a) b)

b) Si l'image de l'étoile se trouve sur Ox, trois cas sont possibles :

- si θ est inférieur à un certain angle que nous appellerons θ_1, le senseur gros ne reçoit rien;
- si θ est plus grand que θ_1 mais reste cependant inférieur à un angle que nous appellerons θ_2, il y a répartition de la lumière entre le senseur gros et le senseur fin;
- si θ est compris entre θ_2 et θ_g, θ_g étant le champ de vision du senseur gros, tout est reçu par le senseur gros.

c) Si l'image se trouve hors des axes Ox et Oy, on peut se ramener au cas *b*), mais avec des valeurs θ_1' et θ_2' différentes de θ_1 et de θ_2, telles que $\theta_1 < \theta_1' < \theta_f < \theta_2' < \theta_2$. Ceci peut être résumé par la Figure 9 : le senseur fin fonctionne seul si l'image de l'étoile se trouve dans la région 1; le senseur gros fonctionne seul dans la région 3; et dans la région 2, les deux senseurs fonctionnent simultanément.

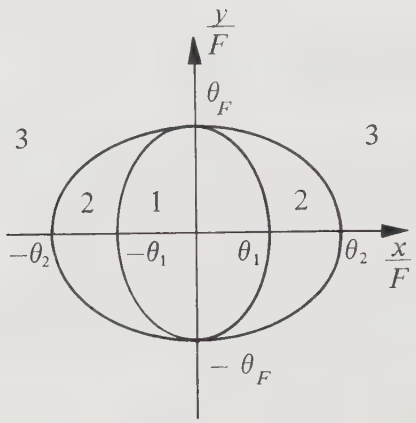


Figure 9.

Calculons maintenant θ_1 et θ_2. Pour cela, reportons-nous à la Figure 8 *b*) et supposons que l'image de l'étoile soit sur l'axe Ox. Dans le cas des rayons 1, nous avons $\theta = \theta_1$, et les relations bien connues entre les côtés des triangles rectangles semblables nous permettent d'écrire :

$$\frac{\frac{\delta_{in}}{2} - |x_1|}{\frac{\delta_{in}}{2}} = \frac{\frac{D}{2} + \frac{\delta_{in}}{2}}{F + \frac{\delta_{in}}{2}}$$

où D est le diamètre du miroir primaire et x_1 l'abscisse de l'étoile. Remarquant que $\theta_1 = x_1/F$ et que $\theta_f = \frac{\delta_{in}}{2F}$, nous en tirons :

$$\theta_1 = \theta_f \times \frac{2F - D}{2F + \delta_{in}}.$$

De même avec les rayons 2, l'abscisse de l'étoile est x_2 et on a :

$$\frac{|x_2| - \frac{\delta_{in}}{2}}{\frac{\delta_{in}}{2}} = \frac{\frac{D}{2} - \frac{\delta_{in}}{2}}{F + \frac{\delta_{in}}{2}} \qquad \text{d'où :} \qquad \theta_2 = \theta_f \times \frac{2F + D}{2F + \delta_{in}}.$$

La détermination de δ_{ex} et δ_{exM} s'effectue de la même façon en écrivant que $\frac{\delta_{ex}}{2} = F\,\theta_g$ et en considérant les rayons 3 :

$$\frac{\frac{\delta_{exM}}{2} - \frac{\delta_{ex}}{2}}{\frac{\delta_{exM}}{2}} = \frac{\frac{D}{2} + \frac{\delta_{exM}}{2}}{F + \frac{\delta_{exM}}{2}} \qquad \text{d'où :} \qquad \delta_{exM} = \theta_g \frac{4F^2}{2F - D - 2\delta_{ex}}.$$

Avec les valeurs numériques précédentes, on trouve ainsi :

$$\theta_1 = 1' 33''; \qquad \theta_2 = 2' 35''; \qquad \delta_{ex} = 11{,}6 \text{ mm et} \qquad \delta_{exM} = 15{,}6 \text{ mm}.$$

Avec ces valeurs numériques et avec les dimensions précédemment indiquées pour le miroir secondaire et l'ouverture du miroir primaire, une étoile dépointée de plus de 10 minutes d'arc n'est pas dans le champ de vision du senseur fin; en effet il est facile de montrer qu'il suffit pour cela que $\delta_{ex} > 7{,}32$ mm. La position du diaphragme entraîne une obturation du faisceau réfléchi par le miroir secondaire : on perd ainsi 7,24 % de l'intensité lumineuse.

Il resterait à préciser la fonction de répartition de la lumière entre les deux senseurs quand l'image de l'étoile se trouve dans la région 2 de la Figure 9. Nous ferons cette étude dans l'Annexe 1.

2.3 Détermination de la position de l'étoile

Les détecteurs devant fonctionner dans l'infrarouge, il est nécessaire d'utiliser un dispositif à disque modulateur pour améliorer le rapport signal sur bruit, puisque les détecteurs infrarouges ont généralement une caractéristique du bruit en $1/f$ quand la fréquence f diminue. Parmi les différents dispositifs possibles, celui qui semble préférable est un système à modulation de fréquence, car il permet d'obtenir un bon rapport signal sur bruit et de distinguer, plus facilement qu'avec d'autres systèmes, l'étoile recherchée en présence de bruit de fond et en présence d'autres étoiles moins brillantes dans le champ de vision.

On doit cependant remarquer qu'en infrarouge la présence en permanence d'un disque modulateur dans le champ de vision du détecteur peut augmenter sensiblement le bruit de fond si le disque modulateur est à une température d'environ 300 °K. Aussi pour éviter cette diminution du rapport signal sur bruit, nous utiliserons un disque modulateur réfléchissant et refroidi : réfléchissant parce que, ainsi, il aura un faible coefficient d'émission en infrarouge; refroidi, parce qu'alors l'intensité de son émission sera faible et se situera vers des longueurs d'onde plus grandes. Ce refroidissement peut d'ailleurs être facilement réalisé : en effet les détecteurs de l'interféromètre sont refroidis par du gaz solidifié, dont la sublimation permet de garder la température des détecteurs très basse et stable; le gaz ainsi obtenu est également à une température très basse et peut être alors utilisé pour refroidir le disque modulateur.

Nous allons voir tout d'abord la loi donnant la fréquence en fonction de l'angle de dépointage et nous en verrons ensuite l'application à notre satellite.

2.3.1 LOI FRÉQUENCE-ANGLE DE DÉPOINTAGE

Par un dispositif optique, qui sera dans notre application un miroir tournant, l'image de l'étoile décrit un cercle sur un disque modulateur par transmission à secteurs alternativement opaques et transparents, fixe dans le plan focal. Si l'étoile est parfaitement alignée avec l'axe optique de notre

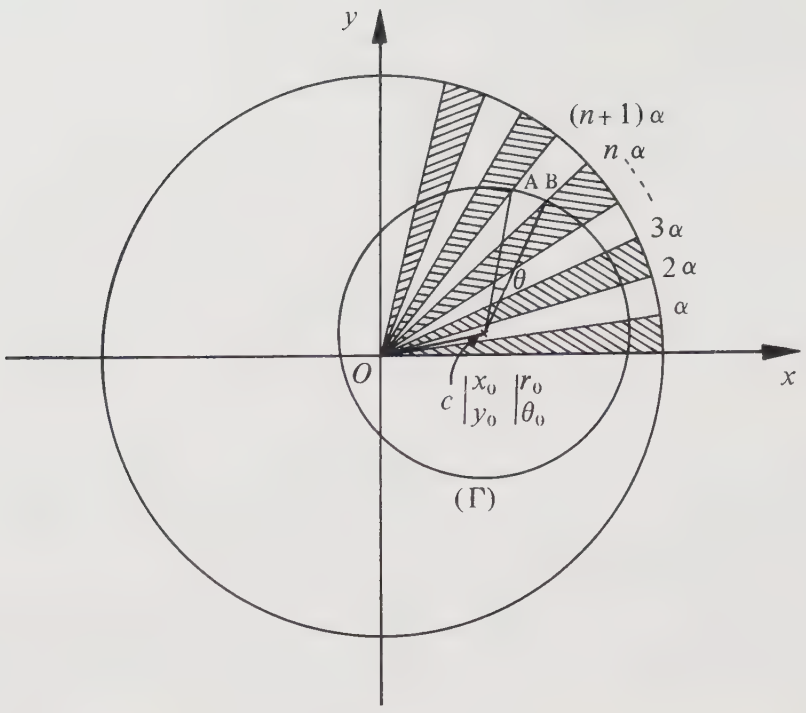


Figure 10.

système, le cercle décrit est concentrique avec le disque modulateur et la fréquence du signal carré obtenu en sortie du détecteur est constante. Si, par contre, l'étoile est hors de l'axe optique, nous allons obtenir un signal rectangulaire modulé en fréquence. La variation maximum de fréquence est fonction de la distance centre du disque-image de l'étoile et la phase donne l'écart angulaire de la droite centre du disque-image par rapport à une direction arbitraire. Étudions le cas d'un disque modulateur ayant des secteurs dont les bords sont droits (Figure 10).

Supposons que l'image de l'étoile se trouverait en C, de coordonnées cartésiennes (x_0, y_0) et de coordonnées polaires (r_0, θ_0), si on ne la déviait pas. En fait le miroir tournant lui fait décrire le cercle (Γ) de rayon R. Calculons la longueur L de l'arc AB en fonction de r_0 et de θ_0.

On a : $L = AB = R\theta$. Pour calculer θ, nous allons calculer la surface du secteur CAB de deux façons différentes. On sait ainsi que $S_{CAB} = \frac{1}{2} R^2 \theta$ et que par ailleurs on a :

$$S_{CAB} = S_{OAB} + S_{OBC} - S_{OAC}.$$

Or :

$$S_{OBC} = \frac{1}{2} |\overline{OC}| \cdot |\overline{OB}| \sin (n\alpha - \theta_o)$$

ou :

$$S_{OBC} = \frac{1}{2} r_o \left\{ r_o \cos (n\alpha - \theta_o) + R \sqrt{1 - \frac{r_o^2}{R^2} \sin^2 (n\alpha - \theta_o)} \right\} \sin (n\alpha - \theta_o) ;$$

de même :

$$S_{OAC} = \frac{1}{2} r_o \left\{ r_o \cos [(n+1)\alpha - \theta_o] + R \sqrt{1 - \frac{r_o^2}{R^2} \sin^2 [(n+1)\alpha - \theta_o]} \right\} \sin [(n+1)\alpha - \theta_o];$$

d'autre part :

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}\int_{n\alpha}^{(n+1)\alpha} r^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{n\alpha}^{(n+1)\alpha} \left\{ r_0 \cos(\theta - \theta_0) + R\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2}\sin^2(\theta - \theta_0)} \right\}^2 d\theta$$

ou

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}R^2\left\{\alpha + \frac{r_0^2}{2R^2}\sin\alpha\cos\left[(2n+1)\alpha - 2\theta_0\right]\right.$$

$$+ \arcsin\left[-\frac{r_0}{R}\sin(n\alpha - \theta_0)\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2}\sin^2\left[(n+1)\alpha - \theta_0\right]} + \frac{r_0}{R}\sin\left[(n+1)\alpha - \theta_0\right] \times \right.$$

$$\left.\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2}\sin^2(n\alpha - \theta_0)}\right] + \frac{r_0}{R}\sin\left[(n+1)\alpha - \theta_0\right]\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2}\sin^2\left[(n+1)\alpha - \theta_0\right]}$$

$$\left. - \frac{r_0}{R}\sin(n\alpha - \theta_0)\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2}\sin^2(n\alpha - \theta_0)}\right\}.$$

D'où, après développement et réduction, il vient :

$$\boxed{L = R\left\{\alpha + \arcsin\left[\frac{r_0}{R}\sin\left[(n+1)\alpha - \theta_0\right]\right] - \arcsin\left[\frac{r_0}{R}\sin(n\alpha - \theta_0)\right]\right\}}$$

ou, si nous développons L en série entière de r_0/R, si α est petit et $r_0/R < 1$:

$$L = R\left\{\alpha + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(2i+1)(i!)^2\, 2^{2i}}\left[\sin^{2i+1}\left[(n+1)\alpha - \theta_0\right] - \sin^{2i+1}(n\alpha - \theta_0)\right]\left(\frac{r_0}{R}\right)^{2i+1}\right\}.$$

Si nous supposons que l'étoile tourne autour de C avec la vitesse angulaire ω_0, alors

$$L = R\omega_0 T/2 = R\omega_0/2\, F.$$

D'où $F = R\omega_0/2\, L$ est la fréquence du signal de sortie du détecteur.

Ainsi :

$$F = \frac{\omega_0}{2} \cdot \frac{1}{\alpha + \arcsin\left[\frac{r_0}{R}\sin\left[(n+1)\alpha - \theta_0\right]\right] - \arcsin\left[\frac{r_0}{R}\sin(n\alpha - \theta_0)\right]}$$

ou aussi :

$$F = \frac{\omega_0}{2\alpha} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\alpha^j}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(2i+1)(i!)^2\, 2^{2i}}\left[\sin^{2i+1}\left[(n+1)\alpha - \theta_0\right] - \sin^{2i+1}(n\alpha - \theta_0)\right]\left(\frac{r_0}{R}\right)^{2i+1}\right\}^j.$$

Nous pouvons voir que :

$$F = F_{max} \quad \text{si} \quad (n+1)\alpha - \theta_0 = \pi + k\alpha \quad \text{avec} \quad 0 < k < 1$$

et que

$$F = F_{min} \quad \text{si} \quad (n+1)\alpha - \theta_0 = k\alpha.$$

Donc :

$$\Delta F = F_{max} - F_{min} = \omega_0 \cdot \frac{\arcsin\left[\frac{r_0}{R}\sin k\alpha\right] - \arcsin\left[\frac{r_0}{R}\sin(k-1)\alpha\right]}{\alpha^2 - \left\{\arcsin\left[\frac{r_0}{R}\sin k\alpha\right] - \arcsin\left[\frac{r_0}{R}\sin(k-1)\alpha\right]\right\}^2}$$

ou encore :

$$\Delta F = \frac{\omega_0}{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(2i)!}{(2i+1)(i!)^2 2^{2i}}\left[\frac{\sin^{2i+1} k\alpha - \sin^{2i+1}(k-1)\alpha}{\alpha}\right]\left(\frac{r_0}{R}\right)^{2i+1}\right\}^{2j+1}$$

Cette expression sous la forme d'une série est utile, si nous remarquons que pratiquement $\alpha \ll 1$; ce qui permet d'écrire que :

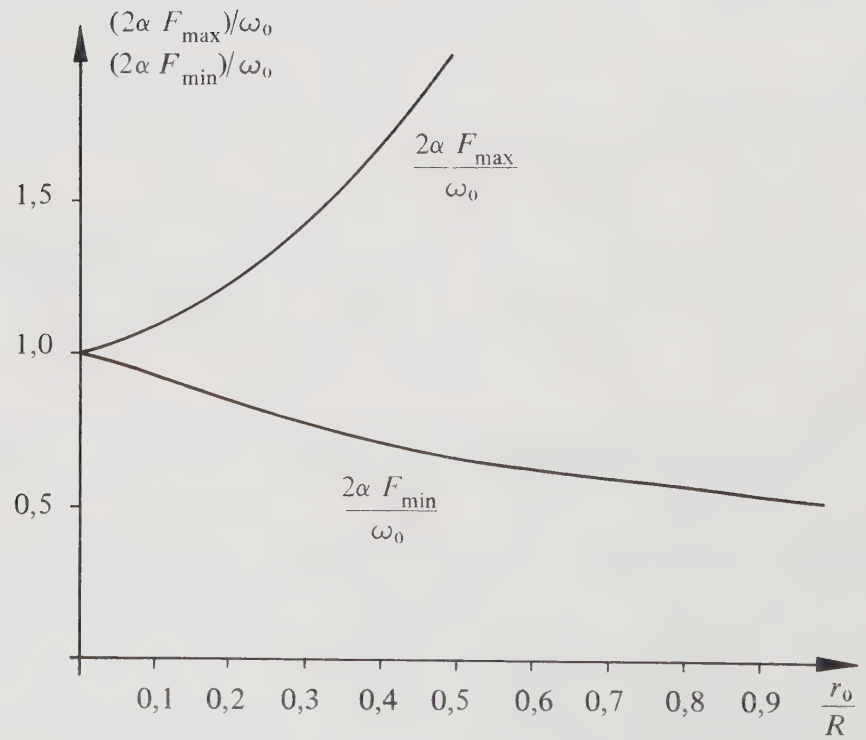
$$\Delta F \simeq \frac{\omega_0}{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{R}\right)^{2j+1} = \frac{\omega_0}{\alpha}\cdot\frac{\frac{r_0}{R}}{1-\left(\frac{r_0}{R}\right)^2}$$

Avec les mêmes approximations que plus haut, nous trouvons :

$$F_{max} = \frac{\omega_0}{2\alpha}\cdot\frac{1}{1-\frac{r_0}{R}}$$

$$F_{min} = \frac{\omega_0}{2\alpha}\cdot\frac{1}{1+\frac{r_0}{R}}$$

Figure 11.



ce qui montre une dissymétrie dans la fréquence de modulation et introduit une limitation dans la valeur du rapport r_0/R. En effet il faut éviter que l'harmonique 2 de F_{min} soit inférieur à F_{max}, c'est-à-dire qu'il faut que $F_{max} < 2\,F_{min}$, soit :

$$\frac{1}{1-\frac{r_0}{R}} < \frac{2}{1+\frac{r_0}{R}} \qquad \text{ou} \qquad r_0/R < 1/3.$$

Les quantités $F_{max}\left(\frac{r_0}{R}\right)$ et $F_{min}\left(\frac{r_0}{R}\right)$ sont représentées en valeurs réduites sur la Figure 11.

Revenant à l'expression ΔF en fonction de r_0/R, on constate que $\Delta F = \frac{\omega_0}{\alpha} \cdot \frac{r_0}{R}$ avec une précision meilleure que 10 % si $r_0/R < 1/3$.

2.3.2 DÉTERMINATION DES COORDONNÉES DE L'ÉTOILE

Nous venons de voir que le signal de sortie du détecteur est modulé en fréquence, la fréquence minimum étant déphasée de l'angle θ_0 par rapport au miroir tournant. Ce signal est ensuite filtré dans un filtre à bande relativement large pour ne conserver que le premier harmonique et éliminer le plus possible de bruit. Puis, après passage dans un amplificateur limiteur, il est démodulé en fréquence. On obtient alors un signal du type :

$$V = E\cos(\omega_0 t - \theta_0) \qquad \text{avec} \qquad E = K\,\Delta F \# K\frac{\omega_0}{\alpha}\cdot\frac{r_0}{R} \# K'\frac{r_0}{R}.$$

En mesurant E et θ_0, on peut donc obtenir les coordonnées polaires de l'étoile. Il est plus intéressant cependant de calculer les coordonnées cartésiennes de l'étoile, car les angles de dépointage autour des deux axes perpendiculaires à l'axe optique du télescope leur sont directement proportionnels; ceci peut être obtenu très facilement en remarquant que :

$$V = E\cos\omega_0 t\cos\theta_0 + E\sin\omega_0 t\sin\theta_0 = K'' x_0\cos\omega_0 t + K'' y_0\sin\omega_0 t.$$

Par conséquent pour obtenir x_0 et y_0, il suffit d'échantillonner la tension de sortie du détecteur aux temps $t = 0$ ou $t = \frac{\pi}{\omega_0}$ pour x_0 et aux temps $t = \frac{\pi}{2\,\omega_0}$ et $t = \frac{3\,\pi}{2\,\omega_0}$ pour y_0, ces temps pouvant être fournis directement par le moteur du miroir tournant.

2.4 Schéma optique du senseur fin

2.4.1 CONFIGURATION ADOPTÉE

Comme nous l'avons vu plus haut, le senseur fin est situé derrière le miroir primaire du télescope et prélève une partie de la lumière tombant sur l'interféromètre. Cette partie devra donc être le plus faible possible pour éviter de trop allonger les mesures.

Or il est évident que l'usage d'un disque modulateur entraîne la perte de la moitié de la lumière. Aussi pour récupérer la moitié perdue, nous avons choisi d'utiliser un disque modulateur dont les secteurs opaques sont totalement réfléchissants. Les deux faisceaux sont ensuite concentrés sur deux

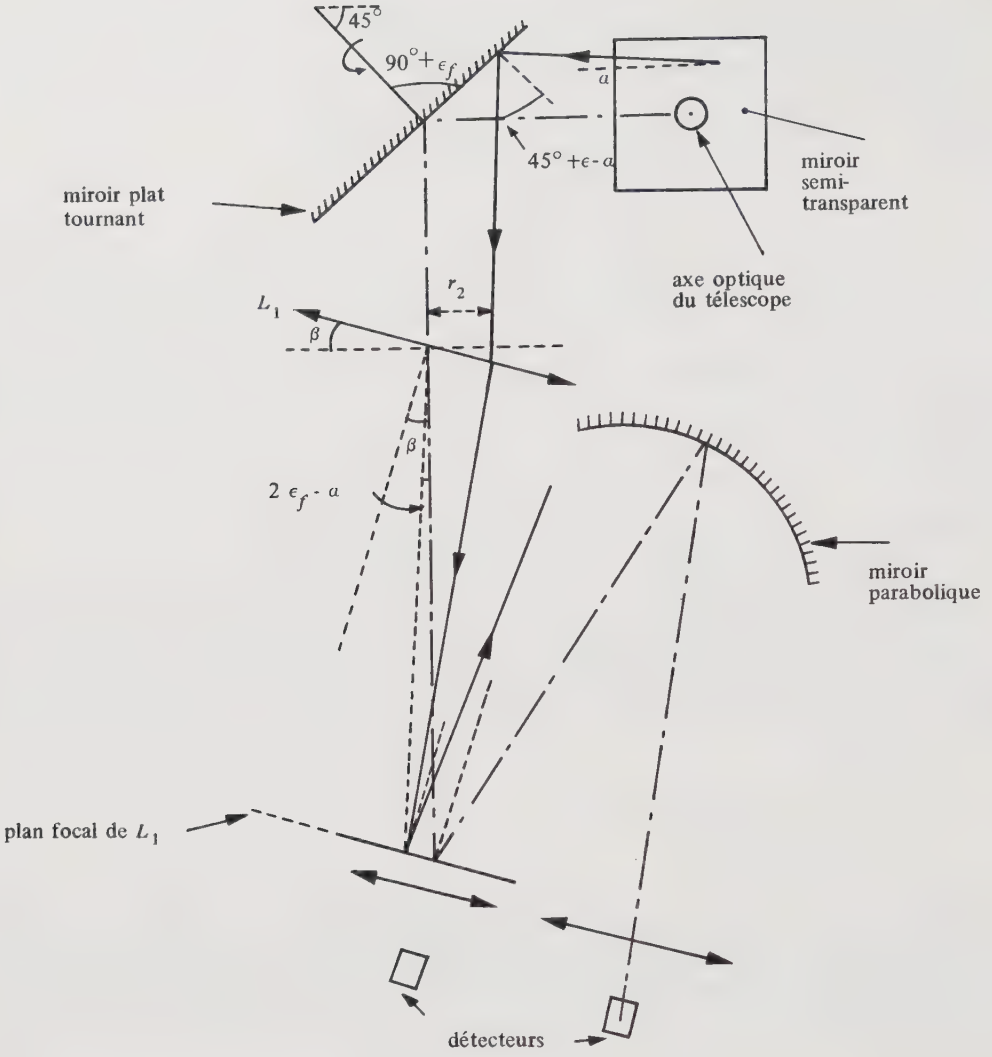


Figure 12 : Optique du senseur fin.

détecteurs fonctionnant en opposition de phase. Ceci peut permettre de gagner un peu en rapport signal sur bruit, et beaucoup en fiabilité, puisque le détecteur est doublé.

Pour pouvoir utiliser la lumière réfléchie, nous devons incliner le disque modulateur. Mais comme le disque doit se trouver dans le plan focal de la lentille L_1 (Figure 12), il faut donc incliner le plan focal, donc la lentille L_1, de l'angle β.

Une autre solution consiste à utiliser une lentille hors de l'axe. Mais comme, pour des raisons pratiques d'encombrement, la distance focale de la lentille est limitée, son ouverture serait deux fois plus grande que dans le cas précédent et les aberrations plus importantes.

Enfin une configuration n'utilisant que des miroirs ne convient pas non plus pour des raisons d'encombrement.

Ainsi la lumière venant du télescope tombe d'abord sur la lame semi-transparente qui en renvoie une partie sur le miroir tournant. L'axe de ce miroir est dans un plan perpendiculaire à l'axe optique du télescope et forme un angle de 45° avec les rayons qui tombent sur le miroir tournant sans être dépointés. Le miroir tournant et son axe forment un angle de $90° + \varepsilon_f$. Déterminons d'abord ε_f.

2.4.2 CALCUL DE ε_f

L'angle ε_f dépend des valeurs maximum du rapport r_0/R que nous tolérons et de l'angle de dépointage α. Supposons que $(r_0/R)_{max} = 1/3$. Alors puisque $r_{0\ max} = f_1\ \alpha_{max}$ et $R = 2 f_1\ \varepsilon_f$, f_1 étant la distance focale de la lentille L_1,

$$(r_0/R)_{max} = \alpha_{max}/(2\ \varepsilon_f).$$

Or si θ_f est le champ de vision du senseur fin, on a évidemment :

$$\alpha_{max} = \frac{D}{d}\,\theta_f. \qquad \text{D'où :} \qquad \varepsilon_f = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(\frac{r_0}{R}\right)_{max}} \times \frac{D}{d} \times \theta_f.$$

Ainsi, si $(r_0/R)_{max} = 1/3$, $D/d = 20$ et $\theta_f = 2$ minutes d'arc, $\varepsilon_f = 1°$.

2.4.3 CALCUL DE β

La lentille L_1 est inclinée de l'angle β pour permettre de récupérer la lumière réfléchie par le modulateur. Pour calculer β_{min}, il faut donc déterminer le rayon qui tombe le plus près de la verticale sur le disque modulateur et s'assurer qu'il est bien renvoyé hors de la lentille.

Ce rayon est du type de celui qui est tracé sur la Figure 12 en supposant que c'est le rayon le plus écarté de l'axe optique. Il arrive sur la lentille L_1 à la distance $r_{2\ max}/\cos\beta$ de son centre. On voit sur la Figure qu'il ne tombe pas perpendiculairement sur le modulateur si on a la relation :

$$f_1\ \mathrm{tg}\,(\beta - 2\,\varepsilon_f + \alpha_{max}) > r_{2max}/\cos\beta.$$

Si nous supposons β petit, il faut donc que :

$$\beta > \frac{r_{2max}}{f_1} + 2\,\varepsilon_f - \alpha_{max} \qquad \text{ou} \qquad \beta > \frac{r_{2max}}{f_1} + \left[\frac{1}{\left(\frac{r_0}{R}\right)_{max}} - 1\right]\frac{D}{d}\,\theta_f$$

Application numérique : si on prend $f_1 = 40$ cm et les valeurs précédentes pour les autres termes, on trouve : $\beta \geqslant 8°\ 30'$. Le diamètre minimum du disque modulateur est alors de 3,7 cm.

2.5 Schéma optique du senseur gros

Comme nous l'avons vu plus haut, le senseur gros est logé le long du corps du satellite. Le diaphragme-miroir réfléchit en effet les rayons vers la paroi du satellite quand le dépointage est compris entre 2 et 10 minutes d'arc environ. Les angles de dépointage du télescope sont alors déterminés par un dispositif analogue à celui du senseur fin, mais simplifié (Figure 13). Les applications numériques ont montré que les rayons forment avec l'axe optique des angles trop grands pour que l'on puisse envisager de récupérer les rayons qui tombent sur les secteurs opaques du modulateur; un tel système serait trop encombrant. On peut toutefois remarquer qu'il reçoit en fonctionnement plus de lumière que le senseur fin puisque le diaphragme-miroir est totalement réfléchissant.

La principale difficulté est donc celle de l'encombrement, surtout de l'encombrement du faisceau reçu : en effet tel qu'il est représenté sur la Figure 13, sa lentille d'entrée aurait un diamètre de 25 cm!

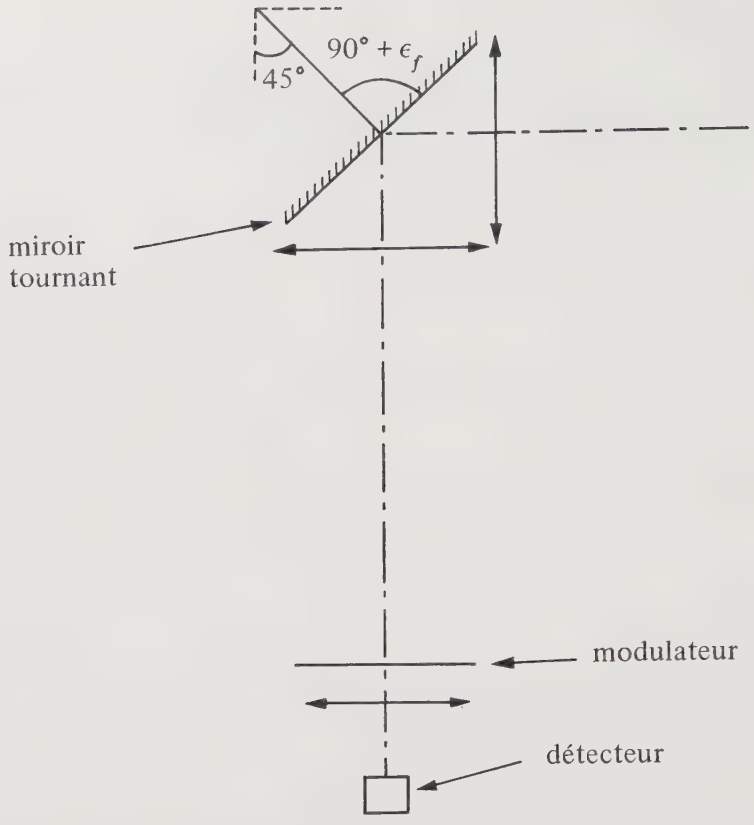


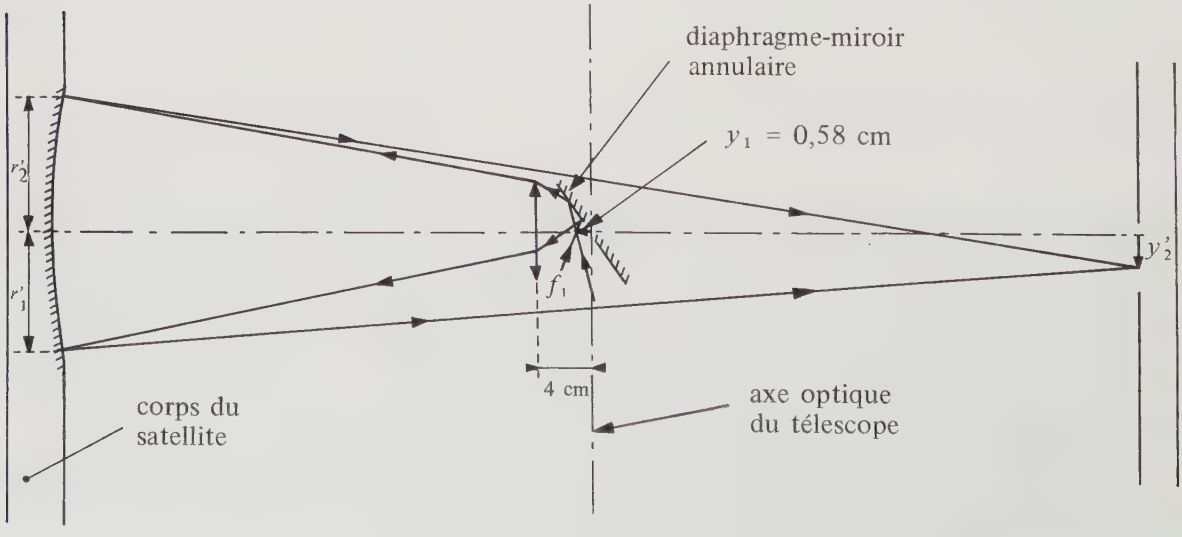
Figure 13 : Optique du senseur gros.

Il faut donc réduire ses dimensions. Pour cela nous avons envisagé un certain nombre de configurations. Nous en avons retenu deux : l'une combine lentille et miroir, l'autre n'associe que deux lentilles.

2.5.1 ÉTUDE DU SYSTÈME LENTILLE-MIROIR PARABOLIQUE

Le schéma de ce système est donné par la Figure 14. Après réflexion sur le diaphragme-miroir, les rayons traversent une lentille, puis sont réfléchis par un miroir parabolique placé sur la paroi du

Figure 14 : Schéma du système lentille-miroir parabolique (échelle non respectée).



satellite. Le but de la lentille est de diminuer les dimensions du miroir. Sa place a été choisie de telle sorte qu'elle n'entraîne pas de perte de lumière : en effet comme nous l'avons vu plus haut, l'ouverture du miroir primaire du télescope a un diamètre de 9,8 cm et le miroir secondaire n'a que 5,25 cm de diamètre; on dispose donc d'une marge d'environ 2,2 cm pour placer la lentille.

Les calculs des caractéristiques de ce système ne présentant pas d'intérêt particulier, il est plus simple et plus parlant à l'esprit de donner les résultats sous forme graphique. La Figure 16 montre ainsi les variations de r'_1, r_2, y'_2, et du rapport p de la distance focale du miroir à son diamètre en fonction de la distance focale f_1 de la lentille; r'_1, r'_2 et y'_2 sont définis sur la Figure 14 pour le plus grand angle possible de dépointage envisagé pour le senseur gros : 10 minutes d'arc. On peut remarquer que p est déterminé par la nécessité de focaliser le faisceau à proximité du bord du satellite et par le fait que le diamètre du miroir parabolique dépend de la distance focale f_1 de la lentille.

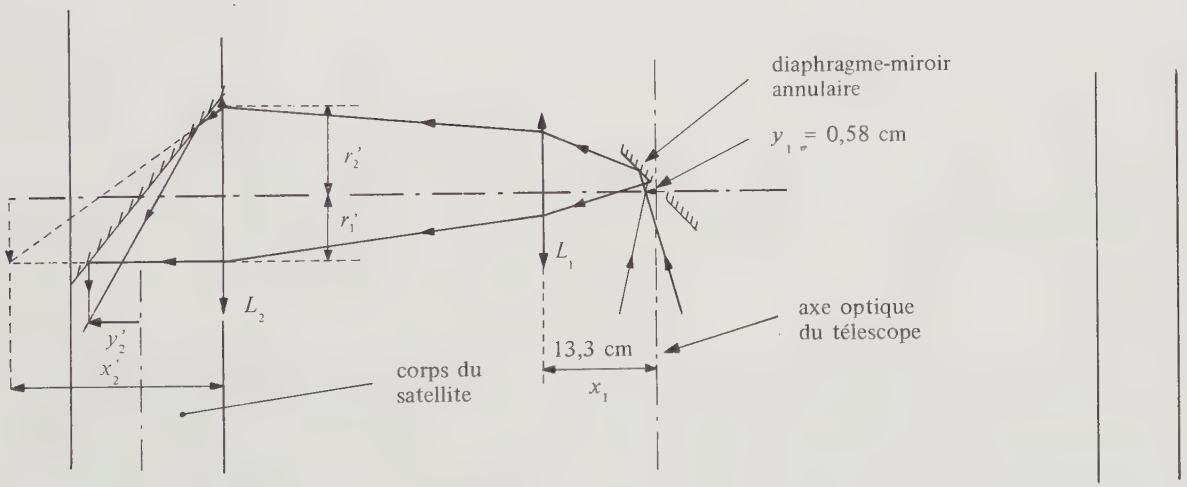
L'examen de la Figure 16 nous montre que y'_2 est relativement grand si f_1 est petit. Pour que y'_2 soit de dimension acceptable, il faut prendre $f_1 > 8$ cm, mais déjà le nombre p est inférieur à 2 et le diamètre du miroir supérieur à 19 cm. Le gain en encombrement dû à la lentille paraît donc assez faible puisqu'il n'est que de 27 % environ. Ceci est dû essentiellement au fait que la lentille est placée très près du foyer du miroir primaire du télescope.

2.5.2 SYSTÈME DE DEUX LENTILLES

Dans ce système schématisé par la Figure 15 nous tolérons une certaine obstruction du télescope par la lentille L_1. Comme une lentille de grand diamètre est relativement plus difficile à réaliser que le miroir correspondant, nous cherchons d'abord à minimiser le diamètre de la deuxième lentille. Pour cela, nous écrivons les expressions de r'_2 et de r'_1 en fonction de p, p étant le rapport de la distance focale de chaque lentille à son diamètre et étant supposé identique pour les deux lentilles :

$$r'_1 = y_1 - \frac{\frac{D}{2} + x_1}{f_1}\left[y_1 + x_1 \frac{D - 2\,y_1}{2\,F}\right] - \frac{D}{2} \cdot \frac{D - 2\,y_1}{2\,F}$$

Figure 15 : Système de deux lentilles (échelle non respectée).



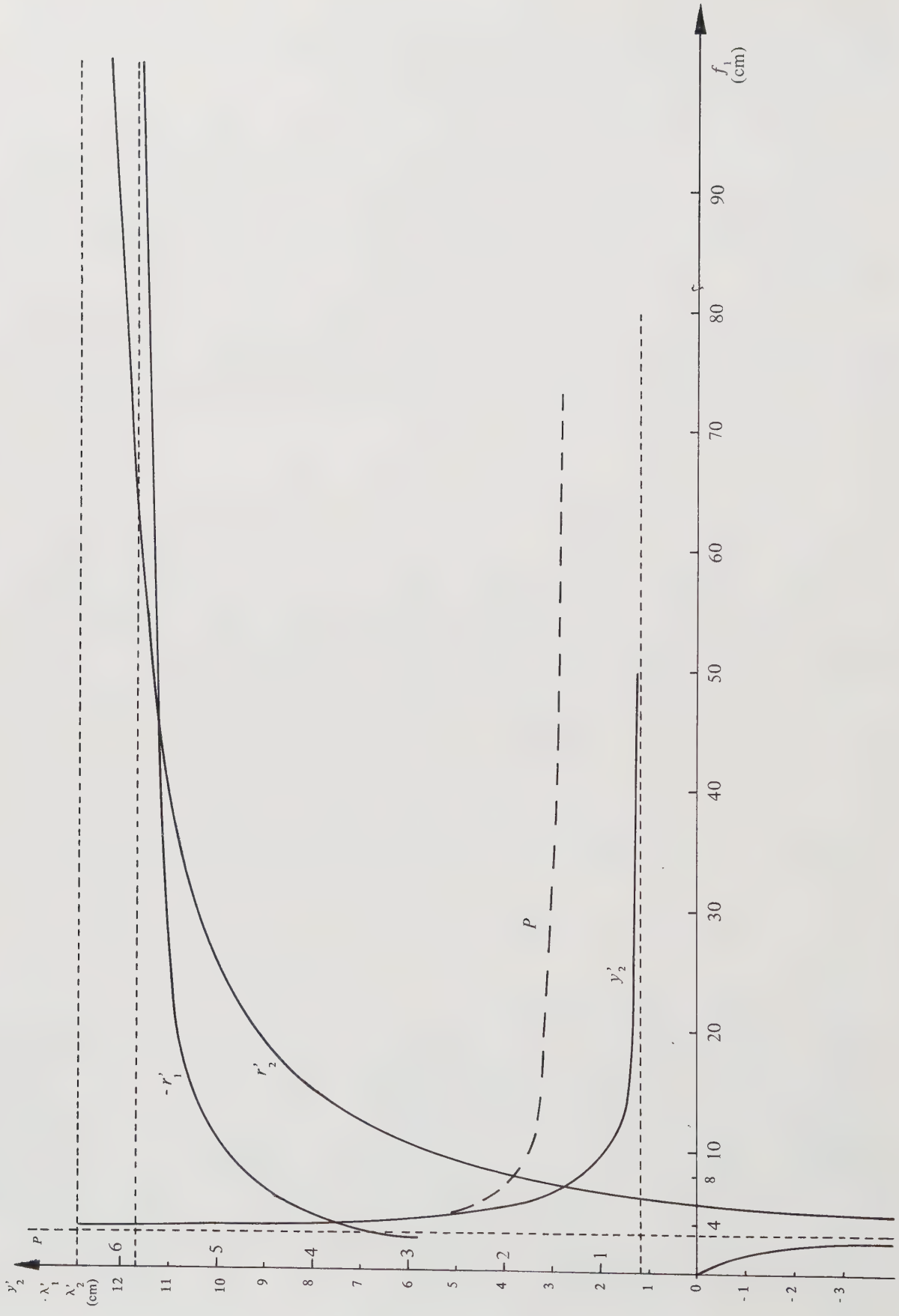


Figure 15. Sur l'axe des ordonnées, lire — r'_1 et r'_2 au lieu de — λ'_1 et λ'_2,

$$r'_2 = y_1 - \frac{\frac{D}{2} + x_1}{f_1}\left[y_1 - x_1 \frac{D + 2\,y_1}{2\,F}\right] + \frac{D}{2} \cdot \frac{D + 2\,y_1}{2\,F}$$

avec $f_1 = 2p\left[y_1 - x_1 \cdot \frac{D + 2\,y_1}{2\,F}\right]$ puisque f_1 est fonction du diamètre de la première lentille et par conséquent de la position x_1 de cette lentille.

Remarquant que $|r'_1| > |r'_2|$ et dérivant r'_1 par rapport à x_1, nous constatons que $|r'_1|$ est minimum quand :

$$x_1^2 - \frac{4\,F\,y_1}{D + 2\,y_1}\,x_1 - \frac{4\,F^2\,y_1}{D^2 - 4\,y_1^2}\left(y_1 + \frac{D^2}{2\,p}\right) = 0$$

c'est-à-dire dans notre application numérique quand $x_1 = 13{,}3$ cm.

Les valeurs de r'_1, r'_2, x'_2, et y'_2 sont données graphiquement en fonction de p dans la Figure 17. On constate que plus p est petit, sans toutefois être inférieur à 1,4, plus r'_1, r'_2, y'_2 et x'_2 sont petits. Ainsi pour $p = 2{,}00$, $y'_2 = -0{,}8$ cm, $x'_2 = 27$ cm, $r'_2 = -5{,}45$ cm et $r'_1 = 4{,}03$ cm. Dans ce cas, L_2 a un diamètre de 10,9 cm et une distance focale de 21,8 cm.

2.5.3 CONCLUSION SUR LE SYSTÈME OPTIQUE DU SENSEUR GROS

Les résultats, principalement ceux donnant le déplacement maximum de l'image sur le détecteur et les dimensions des pièces, montrent que le système de lentilles est préférable, bien que dans l'infrarouge les miroirs soient plus faciles à réaliser que les lentilles.

Il faut ajouter que la lentille L_2 de la Figure 15 doit être remplacée par un système à deux lentilles. En effet il est nécessaire que le faisceau tombant sur le miroir tournant soit un faisceau parallèle : si ce n'était pas le cas, le plan focal sur lequel se forme l'image de l'étoile ne serait pas fixe.

Il est cependant possible d'éviter ce dédoublement si nous choisissons la lentille L_1 telle que $p_{L1} = 2{,}00$. Alors en effet le faisceau qui en sort est parallèle et ceci nous permet de placer la lentille L_2 immédiatement après le miroir tournant et de faire l'économie d'une lentille. L'angle ε_g de la Figure 13, calculé par la même méthode que ε_f, vaut alors : 3° 45′.

2.6 Conclusion

Ce système de référence d'attitude permet d'obtenir les angles de dépointage selon les deux axes perpendiculaires à l'axe optique du télescope. Les détecteurs fonctionnant pratiquement en mode « tout-ou-rien », on peut obtenir un bon rapport signal sur bruit. Pour éliminer une étoile voisine moins brillante, il suffit de prévoir à la sortie du détecteur un amplificateur à seuil et dont le seuil peut être ajusté en fonction de l'intensité respective des deux étoiles.

Par contre si, ayant deux étoiles dans le champ de vision du senseur fin, on désire viser la moins brillante, cette méthode ne permet pas de résoudre le problème. Mais compte tenu de la petitesse du champ de vision du senseur fin, un tel cas a une probabilité très faible de se produire.

Quant au troisième angle, il est déterminé à l'aide d'un senseur d'étoile supplémentaire ou d'un senseur solaire. Nous verrons plus loin très rapidement les problèmes du senseur solaire et la précision qu'on peut en attendre; le senseur d'étoile peut être du type étudié dans ce Chapitre, cependant plus simple puisqu'il s'agit d'une étoile qu'on choisit a priori très brillante. On peut envisager d'autres

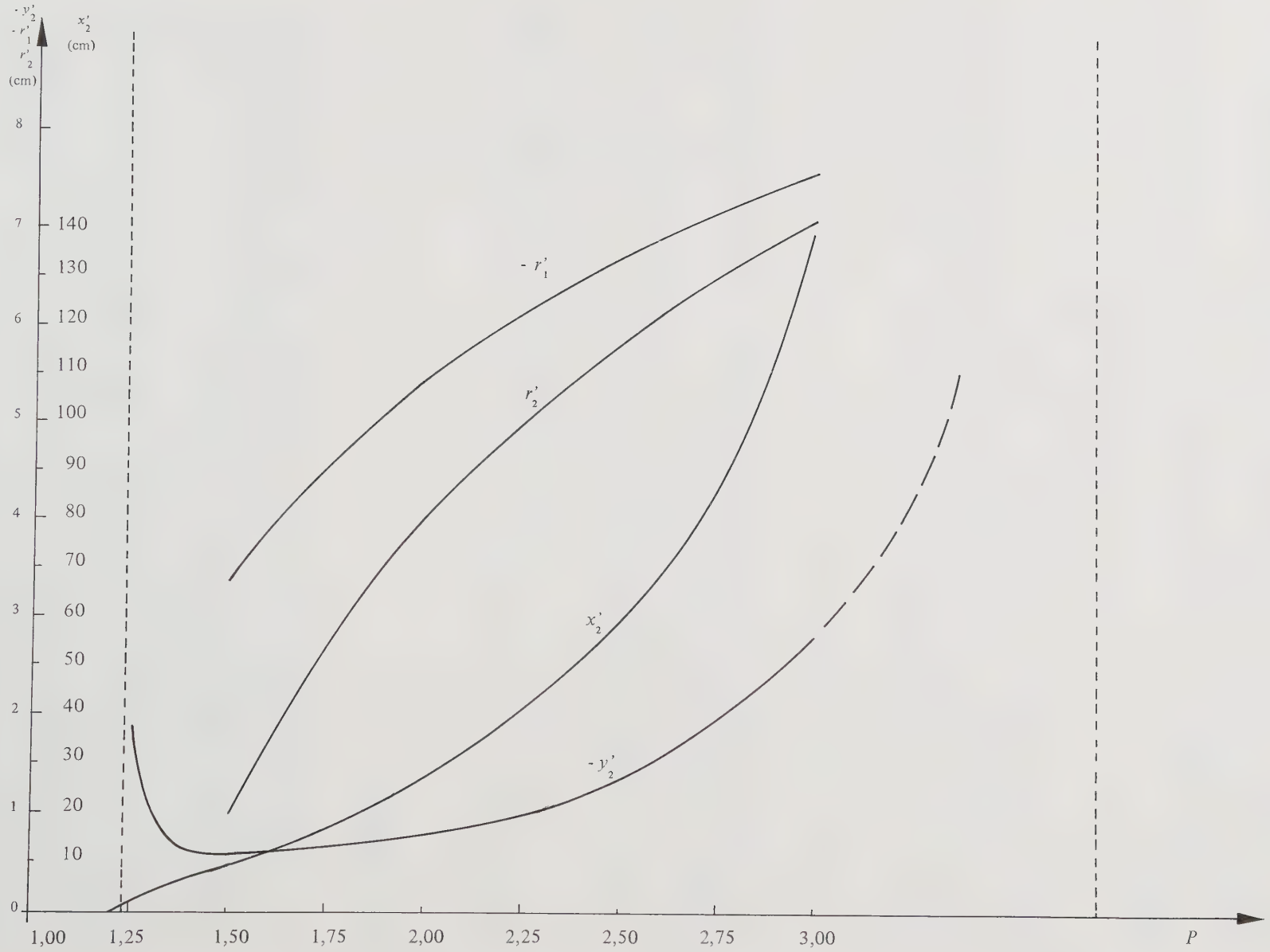

$-y'_2$
$-r'_1$
r'_2 (cm)
x'_2 (cm)
8
7
6
5
4
3
2
1
0
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
$-r'_1$
r'_2
x'_2
$-y'_2$
1,00
1,25
1,50
1,75
2,00
2,25
2,50
2,75
3,00
P

Figure 17.

types [21] comme celui utilisant un photomultiplicateur avec quatre photocathodes disposées en quadrants... Une précision de l'ordre de la minute d'arc étant assez facile à obtenir avec un senseur stellaire, nous ne l'étudierons pas davantage.

3. LES MANŒUVRES INITIALES

Après la mise sur orbite, la séparation du lanceur et du satellite contribue généralement à donner au satellite un mouvement de rotation. Pour aborder plus facilement la recherche de la première étoile du programme d'étude, le satellite doit commencer par réduire ses vitesses angulaires (phases 1 et 2 du Tableau 1).

Lorsque ces vitesses ont atteint un niveau suffisamment faible, l'orientation du satellite n'est pas connue. Aussi à l'aide d'un senseur solaire couvrant un champ de 360° et que nous appellerons senseur solaire gros, puis à l'aide d'un senseur plus précis à champ de vision plus réduit et que nous appellerons senseur fin, on cherche à donner au satellite une orientation correcte par rapport au soleil, ce qui permettra d'alimenter rapidement les batteries solaires (phases 3 et 4).

Ces deux manœuvres, réduction des vitesses initiales et acquisition solaire, constituent les manœuvres initiales du satellite. Nous allons les étudier dans ce Chapitre.

Phase	Objectif	Senseurs	Générateurs de couple
1	Réduction des vitesses initiales. Mode passif	Aucun	Systèmes mécaniques simples
2	Réduction des vitesses initiales. Mode actif	Gyroscopes de vitesse	Jets de gaz
3	Acquisition solaire grosse	Senseur solaire gros + gyroscopes de vitesse	Jets de gaz
4	Acquisition solaire fine	Senseur solaire fin + gyroscopes de vitesse	Jets de gaz

Table 1.

3.1 Réduction des vitesses initiales

Comme le montre le Tableau 1, la réduction des vitesses initiales du satellite s'effectue en deux temps : le premier est passif et le second actif.

La phase passive de réduction des vitesses utilise des dispositifs mécaniques simples; citons par exemple une masse attachée à l'extrémité d'un fil entouré autour du satellite et fixé au corps du satellite

par son autre extrémité. Sous l'effet de la vitesse angulaire du satellite, la masse est soumise à une force centrifuge qui déroule le fil en ralentissant le satellite : il y a échange de moment cinétique entre la masse et le satellite. Quand le fil est complètement déroulé, il se détache automatiquement du satellite. A l'aide de tels dispositifs, on peut ainsi réduire la vitesse angulaire du satellite à moins de 3°/s. Alors peut commencer la phase active de réduction des vitesses.

Pour cette phase active, il nous faut déterminer les vitesses angulaires autour des trois axes; c'est là le rôle des gyroscopes de vitesse, qui nous fourniront ces trois informations. D'autre part il faut pouvoir exercer un couple assez élevé pour que la réduction des vitesses prenne le moins de temps possible : nous avons choisi d'utiliser pour cela un système de jets de gaz, parce que ce système est nécessaire par ailleurs pour désaturer les gyroscopes de commande de moment cinétique, comme nous le verrons plus loin, parce qu'il est très fiable et consomme relativement peu d'énergie électrique. La poussée choisie, 0,05 N, permet d'envisager trois fonctions pour le même système de jets de gaz : la réduction des vitesses initiales, l'acquisition solaire, et la désaturation des gyroscopes.

Nous allons voir maintenant quel type de système de jets de gaz nous pouvons utiliser et nous essaierons ensuite d'évaluer la masse de gaz et le temps nécessaire pour cette première manœuvre.

3.1.1 TYPE DU SYSTÈME DE JETS DE GAZ

Les jets de gaz peuvent être utilisés de trois façons différentes :

– dans des systèmes à gaz chauds; ces systèmes produisent une poussée trop grande pour notre application;

– dans des systèmes à gaz liquéfiés; ceux-ci demandent une puissance électrique assez importante pour vaporiser le liquide, et l'impesanteur pose des problèmes supplémentaires;

– dans des systèmes à gaz froids comprimés; ces derniers sont les plus simples et par conséquent plus fiables que les autres et permettent d'obtenir la poussée désirée de 0,05 N. Leur inconvénient est de demander des réservoirs lourds qui puissent supporter la pression. Nous avons cependant retenu ce type de système pour sa simplicité et sa fiabilité.

Le type de système étant choisi, il nous faut maintenant choisir le gaz. Ce choix doit être fait en considérant la masse totale du gaz et du réservoir et le diamètre de ce dernier en fonction de l'impulsion totale à obtenir.

La masse totale peut être évaluée [21] par la formule :

$$M_{tot} = M_g \left[1 + \frac{3}{2} \frac{P \rho}{s \rho'} \right]$$

où M_g est la masse du gaz, P la pression de stockage, s la charge maximum admissible pour le matériau du réservoir, ρ la densité du matériau du réservoir et ρ' la densité initiale du gaz, soit M_g/V où V est le volume du réservoir. Tenant compte de l'équation des gaz parfaits $PV = \frac{M_g}{M} RT$ où M est la masse molaire du gaz et R la constante des gaz, et sachant que $M_g = I_{tot}/(I_{sp} \cdot g)$, I_{tot} étant l'impulsion totale, I_{sp} l'impulsion spécifique du gaz considéré et g l'accélération de la pesanteur, nous pouvons écrire :

$$M_{tot} = \frac{I_{tot}}{g I_{sp}} + \frac{3}{2} \frac{\rho}{s} \frac{I_{tot}}{g I_{sp}} \frac{RT}{M}.$$

Donc pour une impulsion totale donnée, la masse totale sera minimum si l'impulsion spécifique I_{sp} et le produit $I_{sp} \times M$ sont aussi grands que possible.

Quant au diamètre D du réservoir, il peut être déterminé en remplaçant dans l'équation des gaz parfaits le volume V par son expression $\pi D^3/6$ pour un réservoir sphérique.

D'où :

$$D = \left[\frac{6}{\pi} \cdot \frac{I_{tot}\, RT}{g \cdot I_{sp}\, MP}\right]^{1/3}.$$

Là aussi, le diamètre du réservoir sera minimum si le produit $I_{sp} \times M$ est maximum.

Ainsi l'azote, avec une impulsion spécifique de 70 secondes et un produit $I_{sp} \times M$ de 1 980 g/s, semble être un des meilleurs choix.

3.1.2 DÉTERMINATION DE LA MASSE DU GAZ ET DU TEMPS NÉCESSAIRES A LA RÉDUCTION DES VITESSES INITIALES

On sait que les équations d'Euler appliquées à un satellite s'écrivent :

$$\begin{cases} I_x\, \dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\, \omega_y\, \omega_z = -G_x + T_{px} \\ I_y\, \dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\, \omega_z\, \omega_x = -G_y + T_{py} \\ I_z\, \dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\, \omega_x\, \omega_y = -G_z + T_{pz} \end{cases}$$

où I_x, I_y et I_z sont les moments principaux d'inertie du satellite;
ω_x, ω_y et ω_z les vitesses angulaires du satellite autour de ses axes principaux;
T_{px}, T_{py} et T_{pz} les couples perturbateurs autour de ces axes;
et G_x, G_y et G_z les couples de commande dus aux jets de gaz.

Si on considère que les moments d'inertie I_x, I_y et I_z ont une valeur respective évaluée approximativement à 150, 150 et 200 kg-m², la différence $(I_x - I_y)$ est pratiquement nulle; donc la troisième équation se réduit à :

$$I_z\, \dot{\omega}_z \simeq -G_z + T_{pz} \simeq -G_z;$$

en effet $T_p \ll G$ car T_p est de l'ordre de quelque 10^{-4} N-m et G de l'ordre de quelques 10^{-2} N-m.

Si, dans une première phase, on réduit ω_z à une valeur très faible, les deux autres équations vont se simplifier de la même façon. Donc les masses de gaz consommé et les temps nécessaires à la réduction des vitesses initiales peuvent être évalués en considérant l'équation simplifiée : $I_i\, \dot{\omega}_i = -G_i$.
L'intégration de cette équation donne :

$$\omega_i = -\frac{G_i}{I_i}\, t + \omega_{io},$$

ω_{io} étant la valeur initiale que nous voulons réduire. On voit que $\omega_i = 0$ quand $t_i = \dfrac{I_i\, \omega_{io}}{G_i}$. Or G_i peut être exprimé comme étant le produit de la poussée p par le bras de levier l_i, c'est-à-dire : $G_i = pl_i$ d'où $t_i = \dfrac{I_i\, \omega_{io}}{pl_i}$.

Ainsi, si on suppose que les vitesses angulaires initiales sont de 3°/s pour les trois axes, que la poussée p est de 0,05 N, que les tuyères des jets de gaz sont situées sur le corps du satellite et que les bras de levier sont alors pour les axes OX, OY et OZ respectivement de 1,25 m, 1,25 m et 0,65 m, on trouve qu'il faut 126, 126 et 322 s pour annuler les vitesses angulaires des axes OX, OY et OZ respectivement.

L'évaluation de la masse de gaz consommé se fait en revenant à la formule précédemment citée : $M_{gi} = I_{tot\ i}/(I_{sp}\ g)$. Or par définition, $I_{tot\ i} = p\ t_i$.
D'où :

$$M_{gi} = \frac{I_i\ \omega_{io}}{I_{sp}\ g\ l_i}.$$

Avec $g = 9{,}8$ m/s^2 et $I_{sp} = 70$ s pour l'azote, il faut donc 9,16 g, 9,16 g et 23,5 g pour les axes OX, OY et OZ. La masse totale de gaz consommé est de 41,87 g pour une manœuvre pendant un temps total de 9 mn 34 s.

3.2 Acquisition du Soleil

Dès que les gyroscopes de vitesse indiquent pour les trois axes une vitesse angulaire assez faible (quelques dixièmes de degré par seconde au plus), la phase d'acquisition du Soleil commence. L'orientation du satellite par rapport au Soleil est alors quelconque. Or on désire orienter les panneaux solaires dès que possible. Par ailleurs la recherche de l'étoile à étudier se fera en faisant pivoter le satellite autour de l'axe satellite-Soleil.

Cette recherche du Soleil s'effectue en deux étapes : l'acquisition solaire grosse qui se terminera quand le Soleil sera dans le champ de vision du senseur solaire fin; ensuite nous aurons l'acquisition solaire fine qui orientera le satellite par rapport au Soleil avec une précision de l'ordre de la minute d'arc.

3.2.1 ACQUISITION SOLAIRE GROSSE

Durant cette phase, le Soleil, qui peut avoir n'importe quelle position par rapport au satellite, va être amené dans le champ de vision du senseur solaire fin (de l'ordre de 10°). L'angle d'erreur est donc compris entre 0 et $\pm$ 180°. Par conséquent si on admet pour cette phase une vitesse angulaire pouvant aller jusqu'à 0,3°/s, le temps maximum de cette manœuvre sera de 10 minutes, en négligeant toutefois les temps d'accélération et de décélération.

Pour effectuer cette manœuvre, nous supposerons que nous utilisons un senseur solaire gros et les gyroscopes de vitesse déjà utilisés, les générateurs de couples étant toujours le même système de jets de gaz.

Les meilleurs emplacements pour les senseurs solaires sont donnés sur la Figure 18 : entre les panneaux solaires et leurs articulations avec le corps du satellite. Cette configuration permet de minimiser le nombre d'articulations et de transducteurs d'angles et d'avoir suffisamment de rigidité pour une bonne précision. Enfin les senseurs solaires ayant leur axe optique perpendiculaire par construction aux panneaux solaires, ces panneaux solaires seront toujours utilisés dans les meilleures conditions.

3.2.1.1 **Senseur solaire gros**

Pour avoir le maximum d'efficacité, le senseur solaire gros doit avoir un champ de vision de 360° et surtout, il doit être capable de distinguer la lumière du Soleil de celle de la Terre à n'importe quelle époque de l'année.

Une solution possible est d'utiliser quatre senseurs couvrant chacun un champ de vision de π stéradians et disposés comme le montre la Figure 19. Chaque senseur donne un signal unitaire si le

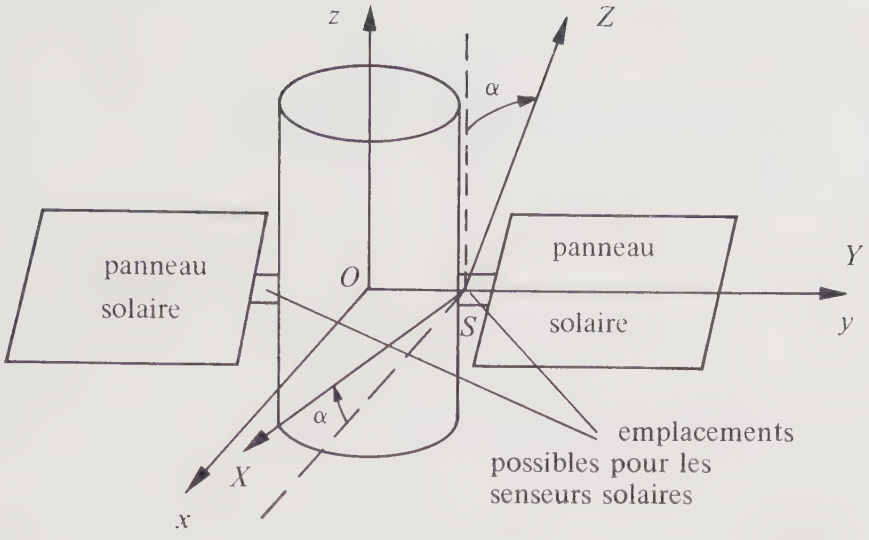
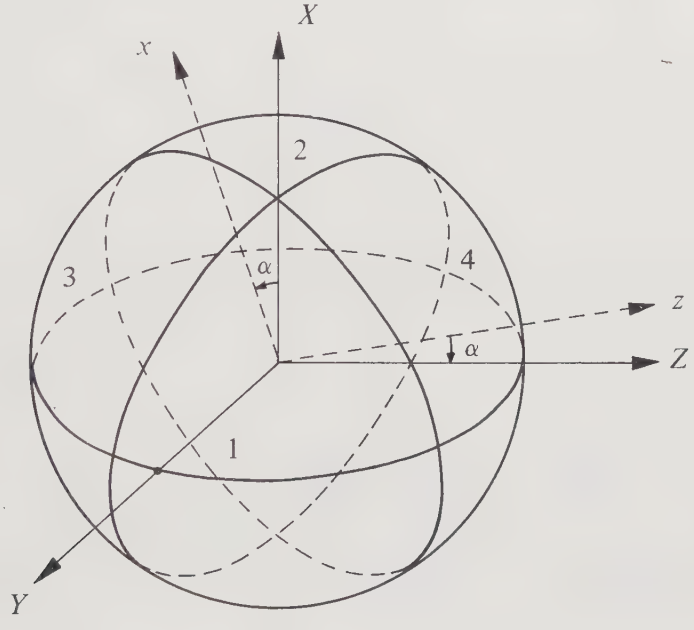


Figure 18.

Figure 19. L'angle α (axes Ox OX) est en fait orienté dans le même sens que l'angle α (axe Oz OZ.)



Soleil est dans son champ de vision et ne donne pas de signal si le Soleil n'y est pas. Pour que la lumière reçue de la Terre ne soit qu'une fraction m du minimum reçu du Soleil, chacun des quatre senseurs est composé lui-même de plusieurs détecteurs dont le champ de vue Ω_d est limité.

Pour évaluer m, on se place dans les conditions les plus défavorables : ainsi, par exemple, on suppose que la sensibilité de certaines cellules solaires peut varier d'un facteur 3 pendant la durée de vie du satellite alors que la sensibilité d'autres cellules reste inchangée, que le coefficient de réflexion de la Terre est l'unité, la Terre étant supposée être une surface réfléchissante et parfaitement diffusante. De plus, pour avoir une opération toujours satisfaisante, on suppose que le plus petit signal dû à la lumière solaire doit être au moins le double du plus grand dû à la lumière de la Terre. Ainsi pour déterminer Ω_d, on prendra : $m = 1/6$.

Calcul du champ de vision Ω_d de chaque détecteur

Ce calcul se fait en déterminant le flux maximum $\Phi_{\oplus M}$ reçu par un détecteur de la Terre et le flux minimum $\Phi_{\odot m}$ reçu du Soleil quand celui-ci est tout entier dans le champ de vision.

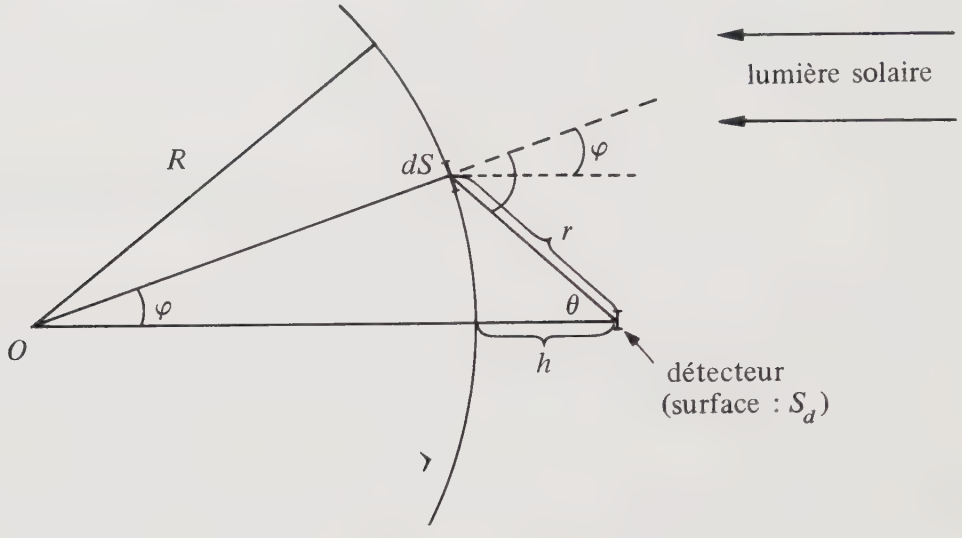


Figure 20. (Lire η au lieu θ.)

Si $\Omega_{\odot m}$ est l'angle solide minimum sous lequel est vu le Soleil au cours de l'année à partir de la Terre et si η_1 est l'angle formé par la direction du Soleil avec la normale au détecteur quand le Soleil se trouve à la limite du champ de vision du détecteur, c'est-à-dire si η_1 est défini par : $\Omega_d = 2\pi(1 - \cos \eta_1)$, $\Phi_{\odot m}$ est évalué par :

$$\Phi_{\odot m} = L_\odot \, \Omega_{\odot m} \, S_d \cos \eta_1,$$

$L_\odot$ étant la luminance du Soleil et S_d la surface du détecteur.

Pour calculer le flux reçu de la Terre, nous allons calculer tout d'abord la luminance $L_\oplus$ de la Terre, en supposant que la Terre est parfaitement réfléchissante et diffusante. Reportons-nous à la Figure 20. La surface élémentaire dS, sur la surface de la Terre, reçoit du Soleil le flux :

$$\Phi_e = L_\odot \, \Omega_\odot \, \mathrm{d}S \cos \varphi.$$

Ce flux est rayonné suivant la loi de Lambert dans 2π stéradians.

D'où :

$$\Phi_{réfl.} = \iint_{2\pi} L_\oplus \, \mathrm{d}S \cos \alpha \, \mathrm{d}\Omega.$$

Remarquant que $\mathrm{d}\Omega = 2\pi \sin \alpha \, \mathrm{d}\alpha$, on peut écrire :

$$\Phi_{réfl.} = L_\oplus \, \mathrm{d}S \, 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \cos \alpha \, \mathrm{d}\alpha = \pi L_\oplus \, \mathrm{d}S.$$

Le coefficient de réflexion étant unitaire, nous avons : $\Phi_{réfl.} = \Phi_e$;

D'où

$$L_{\oplus} = L_{\odot} \frac{\Omega_{\odot}}{\pi} \cos \varphi,$$

en supposant que $\Omega_{\odot}$, l'angle solide sous lequel est vu le Soleil à partir de la Terre, garde une valeur constante sur toute la surface de la Terre. La luminance maximum sera donc obtenue quand cet angle solide sera maximum, ce que nous écrirons :

$$L_{\oplus M} = L_{\odot} \frac{\Omega_{\odot M}}{\pi} \cos \varphi.$$

Le flux élémentaire maximum $d\Phi_{\oplus M}$ reçu par le détecteur de la surface dS vaut :

$$d\Phi_{\oplus M} = L_{\oplus M} \frac{dS \cos \alpha \, S_d \cos \eta}{r^2},$$

η étant l'angle formé par la droite « Centre du détecteur - Centre de dS » avec la droite « Centre du détecteur - Centre de la Terre ».

Pour calculer $\Phi_{\oplus M}$, il faut donc intégrer $d\Phi_{\oplus M}$ sur tout le champ de vision Ω_d.

En remarquant que :

$$\begin{aligned} dS &= 2\pi R^2 \sin \varphi \, d\varphi \\ r \sin \eta &= R \sin \varphi \\ r \cos \eta &= h + R(1 - \cos \varphi), \end{aligned}$$

et en posant :

$$\begin{aligned} a^2 &= 2R(R + h) + h^2 \\ b^2 &= 2R(R + h), \end{aligned}$$

h étant l'altitude du satellite.

$d\Phi_{\oplus M}$ peut être calculé en fonction de la seule variable φ:

$$d\Phi_{\oplus M} = 2K \left\{ \frac{\cos^2 \varphi}{a^2 - b^2 \cos \varphi} - \frac{R(R + h) \cos \varphi (1 - \cos^2 \varphi)}{(a^2 - b^2 \cos \varphi)^2} \right\} d(-\cos \varphi)$$

avec :

$$K = L_{\odot} \Omega_{\odot M} R^2 S_d.$$

D'où, en posant $\cos \varphi = x$,

$$d\Phi_{\oplus M} = \frac{K}{b^2} \left[x + \frac{(b^4 - a^4) x}{(a^2 - b^2 x)^2} \right] dx.$$

Intégrant cette équation de $x_0 = \cos \varphi_0 = 1$ à $x_1 = \cos \varphi_1$, on trouve :

$$\Phi_{\oplus M} = L_{\odot} \Omega_{\odot M} R^2 S_d \left\{ \frac{\cos^2 \varphi - 1}{2b^2} + \frac{(b^4 - a^4)}{b^4} \left[\frac{\cos \varphi_1}{a^2 - b^2 \cos \varphi_1} - \frac{1}{a^2 - b^2} + \frac{1}{b^2} \operatorname{Log} \left| \frac{a^2 - b^2 \cos \varphi_1}{a^2 - b^2} \right| \right] \right\}$$

Puisque nous voulons que $\Phi_{\oplus M} < m\,\Phi_{\odot m}$ avec $m = 1/6$, le champ de vision $\Omega_d = 2\,\pi\,(1 - \cos\eta_1)$ de chaque détecteur est déterminé par l'inégalité :

$$R^2\left\{\frac{\cos^2\varphi_1 - 1}{2\,b^2} + \frac{(b^4 - a^4)}{b^4}\left[\frac{\cos\varphi_1}{a^2 - b^2\cos\varphi_1} - \frac{1}{a^2 - b^2} + \frac{1}{b^2}\operatorname{Log}\left|\frac{a^2 - b^2\cos\varphi_1}{a^2 - b^2}\right|\right]\right\} \leqslant \frac{\Omega_{\odot\,m}}{\Omega_{\odot M}} m\cos\eta_1,$$

φ_1 et η_1 étant reliés par la relation :

$$\cos\eta_1 = \frac{h + R\,(1 - \cos\varphi_1)}{\sqrt{a^2 - b^2\cos\varphi_1}}.$$

Cette inégalité ne peut pas être résolue exactement, mais nous pouvons nous contenter d'une solution approchée sachant que l'angle φ_1 est petit, ce qui nous permet d'écrire :

$$\cos\varphi_1 \simeq 1 - \frac{\varphi_1^2}{2}.$$

Ainsi, posant $R/h = q$, on a :

$$\cos\eta_1 \simeq 1 - \frac{\varphi_1^2}{2}\,q^2$$

De même $\cos^2\varphi_1 - 1 \simeq -\varphi_1^2$

$$\frac{\cos\varphi_1}{a^2 - b^2\cos\varphi_1} - \frac{1}{a^2 - b^2} \simeq \frac{-a^2}{(a^2 - b^2)^2}\cdot\frac{\varphi_1^2}{2}$$

$$\operatorname{Log}\left|\frac{a^2 - b^2\cos\varphi_1}{a^2 - b^2}\right| \simeq \frac{b^2}{a^2 - b^2}\cdot\frac{\varphi_1^2}{2}.$$

L'inégalité devient donc :

$$R^2\left\{-\frac{\varphi_1^2}{2\,b^2} + \frac{b^4 - a^4}{b^4}\left[\frac{-a^2}{(a^2 - b^2)^2}\,\frac{\varphi_1^2}{2} + \frac{\varphi_1^2}{2\,(a^2 - b^2)}\right]\right\} \leqslant \frac{\Omega_{\odot m}}{\Omega_{\odot M}}\,m\left(1 - q^2\,\frac{\varphi_1^2}{2}\right).$$

D'où :

$$q^2\,\frac{\varphi_1^2}{2} \leqslant \frac{m\,\dfrac{\Omega_{\odot m}}{\Omega_{\odot M}}}{2 + m\,\dfrac{\Omega_{\odot m}}{\Omega_{\odot M}}}$$

ou encore :

$$\cos\eta_1 \geqslant \frac{2}{2 + m\,\dfrac{\Omega_{\odot m}}{\Omega_{\odot M}}}$$

c'est-à-dire :

$$\Omega_d \leqslant \frac{2\,\pi\,m\,\dfrac{\Omega_{\odot m}}{\Omega_{\odot M}}}{2 + m\,\dfrac{\Omega_{\odot m}}{\Omega_{\odot M}}}.$$

Ainsi, sachant que $\frac{\Omega_{\odot m}}{\Omega_{\odot M}} = 0{,}935$ et que $m = 1/6$, on trouve : $\Omega_A \leqslant 0{,}145\ \pi$.

Puisque chaque senseur doit couvrir π stéradians, on doit prévoir au moins $\frac{\pi}{0{,}145\ \pi} = 6{,}9$ détecteurs par senseur. En pratique, pour avoir un recouvrement suffisant des champs de vision pour éviter la perte de signal aux limites, on devra utiliser 8 ou 9 détecteurs par senseur.

3.2.1.2 Étude de la phase « acquisition solaire grosse »

Comme les vitesses angulaires du satellite sont faibles, les termes de couplage des axes des équations d'Euler peuvent être négligés. Cette étude peut donc se faire pour un seul axe. La Figure 21 donne le schéma fonctionnel de cette phase : il comporte deux boucles de retour puisque nous utilisons deux types de senseurs : un de position et un de vitesse. Le senseur de position que nous avons étudié dans le paragraphe précédent est du type « plus ou moins » à seuil.

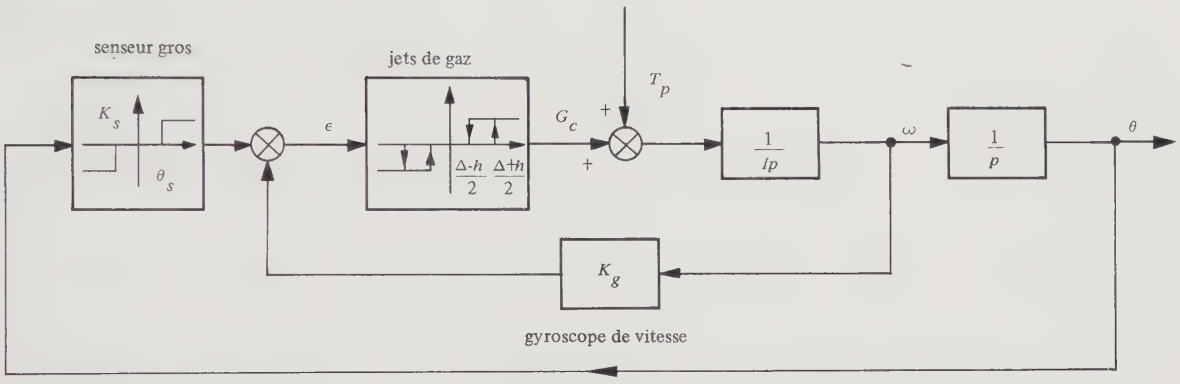


Figure 21.

On peut obtenir assez facilement les caractéristiques essentielles du mouvement du satellite si on se place dans le plan de phase (ω, θ) représenté dans la Figure 22 et où ω est la vitesse angulaire du satellite autour de l'axe considéré et θ la rotation d'axes correspondante. Nous y avons tracé les droites de commutation en traits pleins en tenant compte des caractéristiques particulières du senseur de position et du seuil et de l'hystérésis des jets de gaz; ce seuil et cette hystérésis sont rendus nécessaires par la présence de couples perturbateurs : ils permettent d'éviter une oscillation de faible amplitude et de grande fréquence dont la conséquence serait un gaspillage de gaz. Nous avons indiqué d'autre part sur la Figure la valeur algébrique du couple des jets de gaz suivant le sens de traversée des droites de commutation.

Les trajectoires de phase alors obtenues sont des paraboles puisque $\dot{\omega} = \frac{\Gamma}{I}$, où Γ est la somme des couples perturbateurs et du couple des jets de gaz ($-G_c$, 0 ou $+G_c$ suivant le cas). En intégrant, on trouve :

$$\omega = \frac{\Gamma}{I} t + \omega_0 \qquad \text{et} \qquad \theta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma}{I} t^2 + \omega_0 t + \theta_0.$$

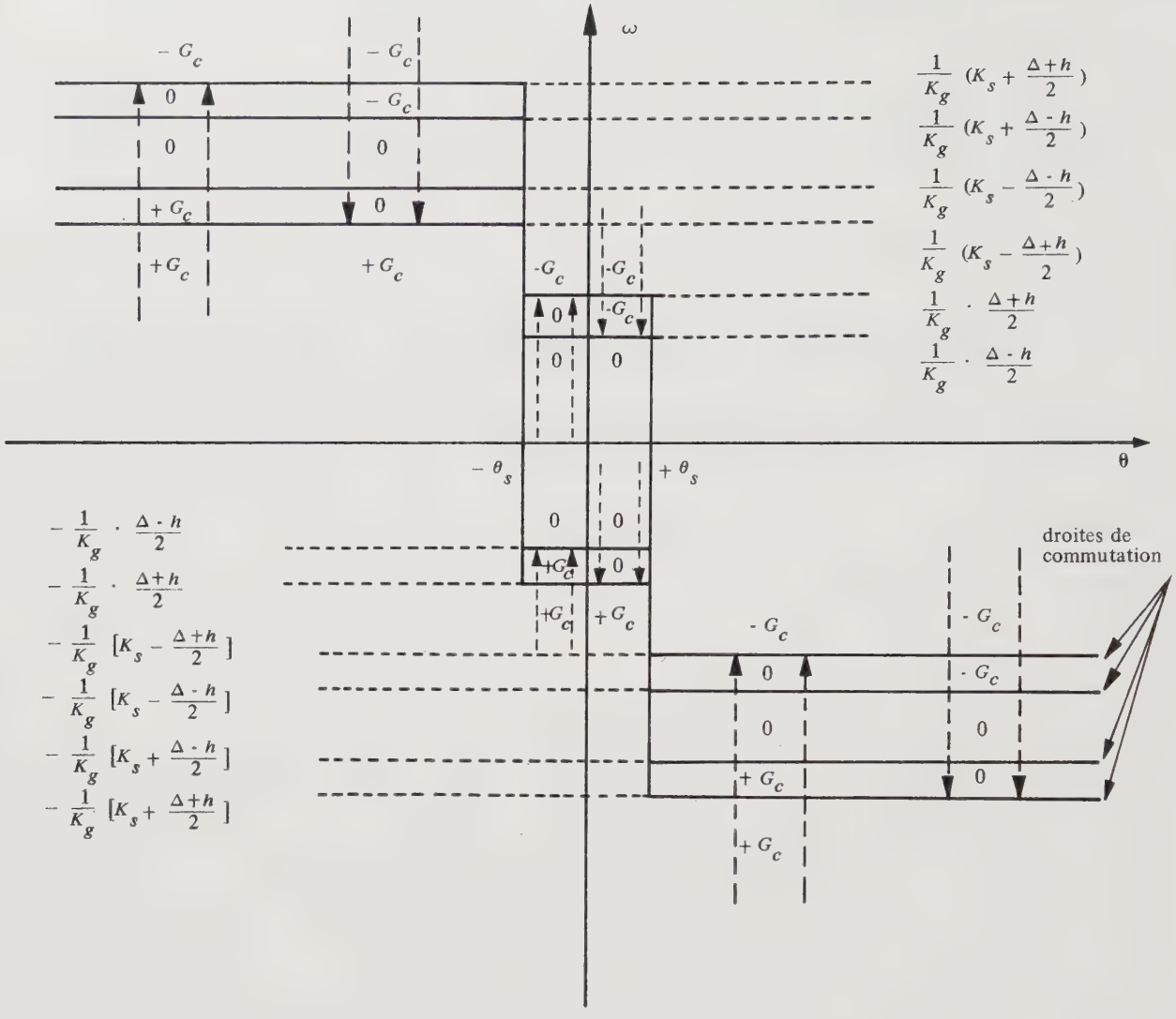


Figure 22.

L'étude de ces trajectoires montre que, quel que soit le point de départ (ω_0, θ_0), on va tendre vers un cycle limite d'amplitude plus ou moins grande suivant les conditions initiales. On peut montrer ainsi que le plus grand cycle limite aura les caractéristiques suivantes :

$$\begin{cases} |\omega|_{\max} = \dfrac{1}{K_g} \cdot \dfrac{\Delta + h}{2} \\ |\theta|_{\max} = \dfrac{I}{8\,(G_c - |T_p|)} \cdot \dfrac{(\Delta + h)^2}{K_g^2} + \theta_s \end{cases}$$

Par conséquent pour que l'acquisition fine puisse avoir lieu dans de bonnes conditions, il faudra que $|\theta|_{\max}$ soit inférieur au champ de vision θ_{sf} du senseur solaire fin. D'où, puisque $|T_p| \ll G_c$:

$$\frac{I\,(\Delta + h)^2}{8\,G_c\,K_g^2} + \theta_s < \theta_{sf}.$$

Par sécurité, on prendra :

$$\frac{I\,(\Delta + h)^2}{8\,G_c\,K_g^2} + \theta_s = \frac{\theta_{sf}}{2}.$$

Par ailleurs, on peut montrer que dans le cas le plus défavorable, le cycle limite sera atteint dans le minimum de temps si on a la relation :

$$2\,\theta_s = \frac{I}{2\,(G_c - |T_p|)} \cdot \frac{K_s}{K_g^2}\,(K_s + \Delta + h) \# \frac{I}{2\,G_c\,K_g^2}\,K_s\,(K_s + \Delta + h).$$

Ces deux équations permettent de calculer les valeurs de $\frac{\Delta + h}{2\,K_g}$ et $\frac{K_s}{K_g}$. On trouve ainsi :

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta + h}{2\,K_g} = \sqrt{\dfrac{G_c}{I}\,(\theta_{sf} - 2\,\theta_s)} \\ \dfrac{K_s}{K_g} = \sqrt{\dfrac{G_c}{I}\,(\theta_{sf} + 2\,\theta_s)} - \sqrt{\dfrac{G_c}{I}\,(\theta_{sf} - 2\,\theta_s)} \end{cases}$$

Avec les valeurs numériques précédemment utilisées et en prenant $\theta_s = 4°$, on a :

- pour l'axe OZ :

$$\left(\frac{\Delta + h}{2\,K_g}\right)_Z \# 0{,}13°/\text{s}$$

$$\left(\frac{K_s}{K_g}\right)_Z \# 0{,}22°/\text{s}$$

- pour l'axe OY :

$$\left(\frac{\Delta + h}{2\,K_g}\right)_Y \# 0{,}22°/\text{s}$$

$$\left(\frac{K_s}{K_g}\right)_Y \# 0{,}43°/\text{s}$$

La consommation de gaz dépend évidemment des conditions initiales (ω_0, θ_0). On peut cependant évaluer la masse maximum de gaz consommé avant que le Soleil arrive dans le champ de vision du senseur solaire fin. En effet dans le cas le plus défavorable, le point (ω_0, θ_0) se trouve dans le premier ou le troisième quadrant, avec $\omega_0 = 0{,}3°/\text{s}$ pour chacun des deux axes et $|\theta_0| > \theta_s$. L'examen des trajectoires de phase montre que la vitesse ω va d'abord s'annuler et atteindre ensuite une valeur de l'ordre de 0,15°/s pour l'axe OZ et 0,3°/s pour l'axe OY. Par conséquent, avant l'entrée du Soleil dans le champ de vision du senseur fin, on aura consommé au plus 5,36 g de gaz.

3.2.2 ACQUISITION SOLAIRE FINE

L'acquisition solaire fine commence dès que le Soleil apparaît dans le champ de vision du senseur solaire fin; on va repérer alors la direction du Soleil avec une grande précision. Cette précision dépend beaucoup du senseur fin. Aussi, avant d'étudier cette phase, nous allons voir très rapidement les problèmes du senseur fin.

3.2.2.1 Senseur solaire fin

Étant donné l'intensité du rayonnement solaire (1,4 kW/m^2 hors de l'atmosphère terrestre selon C. W. Allen [23]), le senseur solaire fin peut être un système optique très simple.

Pour atteindre une précision de l'ordre de la minute d'arc, une technique souvent utilisée est de former l'image du Soleil sur une pyramide réfléchissante dont la base est carrée. Chaque face réfléchit la lumière solaire sur une cellule solaire. Si on fait la différence des cellules opposées, on va pouvoir déterminer la position angulaire du Soleil. La précision est cependant affectée par la variation de sensibilité des cellules; mais on peut améliorer très sensiblement la précision si on s'arrange pour que chaque détecteur n'ait que le bord du Soleil dans son champ de vision lorsque le Soleil est exactement dans l'axe optique du senseur : pour cela on place un masque sur le sommet de la pyramide [24]. On peut ainsi assez facilement atteindre la précision de l'ordre de la minute d'arc qui nous est nécessaire pour l'acquisition stellaire et la caractéristique obtenue est du type linéaire-saturé.

3.2.2.2 Étude de la phase « acquisition solaire fine »

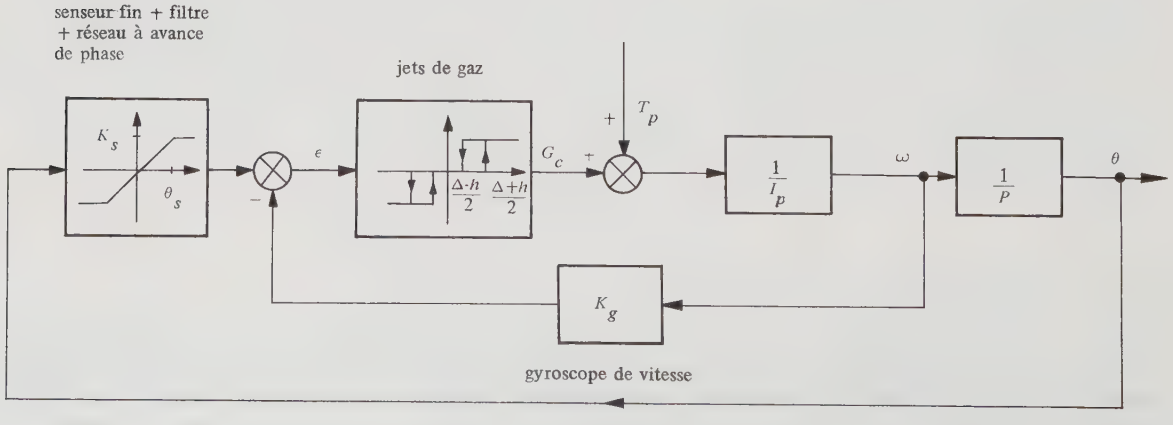
Pour cette phase, nous supposerons que nous utilisons le senseur fin décrit plus haut et aussi les gyroscopes de vitesse; les couples seront fournis par le même système de jets de gaz. Le schéma fonctionnel pour un axe est alors donné par la Figure 23.

Comme pour l'acquisition solaire grosse, cette phase peut être complètement décrite dans le plan de phase (ω,θ). Les trajectoires sont, de la même façon, composées de paraboles et aboutissent à un cycle limite (Figure 24). Leur étude permet de déterminer les caractéristiques du plus grand cycle limite qui sont :

$$\begin{cases} |\omega|_{\max} = \dfrac{h}{2\,K_g} \\ |\theta|_{\max} = \dfrac{I\,h^2}{8\,K_g^2\,(G_c - |T_p|)} + \dfrac{\Delta\,\theta_s}{2\,K_s}. \end{cases}$$

Par conséquent plus K_g est grand plus l'amplitude du cycle-limite est petite; mais alors plus la vitesse d'acquisition doit être faible. Ce problème peut être résolu en utilisant deux valeurs de K_g différentes suivant les informations données par le senseur fin. Une autre solution plus simple consiste à introduire, après filtrage de la sortie du senseur fin, un réseau correcteur à avance de phase de transmit-

Figure 23.



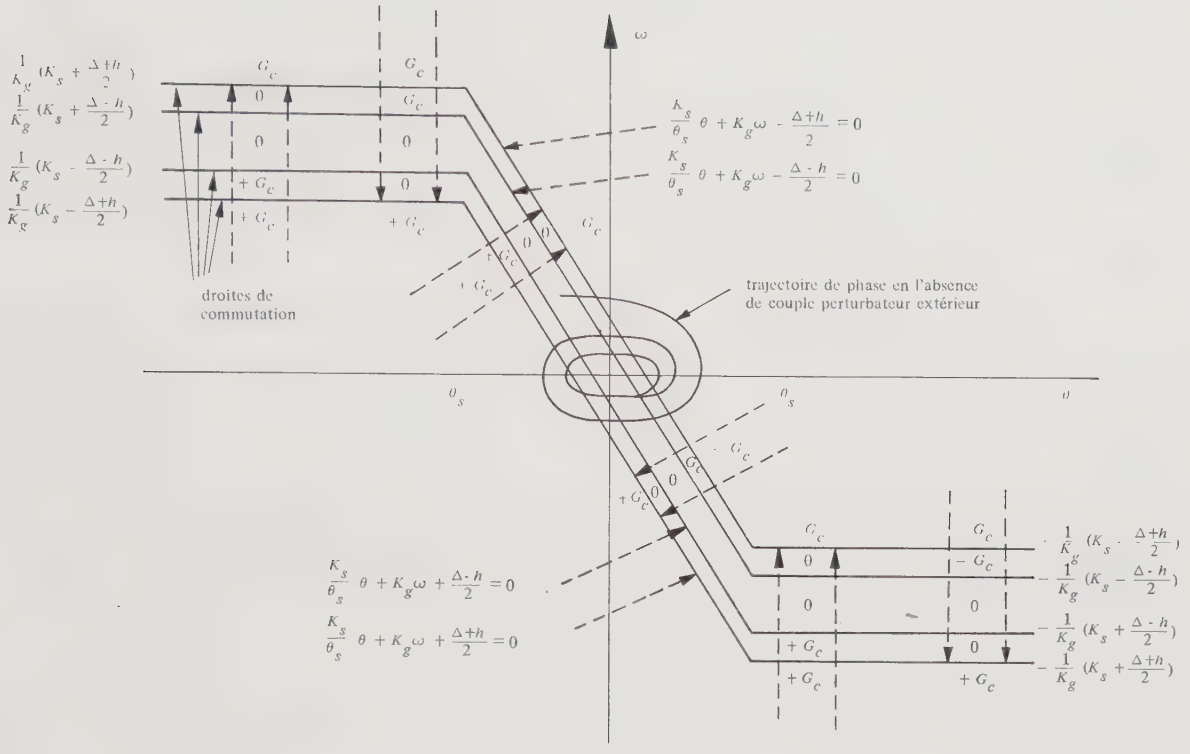


Figure 24.

tance $\frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p}$ avec $a \gg 1$ pour avoir une approximation de la fonction de transfert $(1 + a\tau p)$. Ceci permet d'introduire un terme dérivé supplémentaire dès que le senseur fin n'est plus saturé et correspond à une augmentation automatique de K_g. Les caractéristiques du nouveau cycle limite se déduisent des précédentes en remplaçant $[1 + K_g p]$ par $[1 + (K_g + a\tau)\, p]$.

3.3 Conclusion

Ces premières manœuvres du satellite ne présentent pas de difficultés majeures et sont relativement vite effectuées. Si le lancement a lieu à la fin de la nuit, les vitesses peuvent être réduites pendant la fin de la nuit et on peut disposer de près d'une demi-orbite, soit 45 minutes environ, pour l'acquisition solaire, ce qui est, nous l'avons vu, largement suffisant. Ensuite l'acquisition stellaire peut commencer : le télescope et le senseur d'étoile annexe sont orientés correctement; on repère aussi l'orientation du Soleil par rapport à la plate-forme inertielle de référence; et par jets de gaz, on commande une rotation du satellite autour de l'axe satellite-Soleil. Dès l'apparition des signaux de présence des senseurs stellaires, la commande d'attitude passe au système de gyroscopes de commande de moment cinétique (GCMC) que nous allons maintenant étudier.

4. LES GYROSCOPES DE COMMANDE DE MOMENT CINÉTIQUE

La stabilisation d'un satellite peut être obtenue de différentes façons. On peut en distinguer trois grandes catégories suivant les couples mis en jeu et suivant la façon avec laquelle on les fait intervenir [25] : ce sont les systèmes passifs, actifs ou hybrides.

Les systèmes passifs utilisent les couples stabilisateurs dus à la rotation du satellite sur lui-même ou des couples extérieurs qui sont considérés dans les systèmes actifs comme des couples perturbateurs (le gradient de gravité, les couples solaires, aérodynamiques et magnétiques). Ces systèmes ne demandent pas de senseurs d'attitude. Ils sont fiables et très simples; mais ils ne permettent d'atteindre qu'une précision de l'ordre du degré, ce qui est insuffisant pour un satellite astronomique. De plus, il n'est pas possible de changer l'orientation du satellite.

Les systèmes actifs emploient des senseurs d'attitude pour commander des générateurs de couples internes : ainsi les systèmes d'échange de moment cinétique comme les roues d'inertie et les gyroscopes de commande de moment cinétique (GCMC), ou encore les systèmes à expulsion de masse comme les jets de gaz que nous avons déjà utilisés pour les premières manœuvres. La commande d'attitude peut ainsi être obtenue dans les trois axes avec une très bonne précision, compatible avec les observations astronomiques; de plus, les manœuvres de réorientation du satellitte sont possibles pour les trois axes. Cependant, il convient de noter que les systèmes à expulsion de masse ne sont pas utilisés pour atteindre une précision meilleure que la minute ou la demi-minute d'arc : améliorer cette précision est certes possible, mais conduit à une trop grande consommation de gaz, surtout en présence de couples perturbateurs cycliques.

Enfin, les systèmes hybrides qui font appel à une combinaison des systèmes actifs et passifs sont intéressants dans certaines applications particulières, comme, par exemple, la stabilisation, à des précisions différentes, de deux ou de plusieurs parties articulées d'un satellite.

Pour atteindre les 15 secondes d'arc nécessaires à notre méthode de spectroscopie, nous avons choisi d'utiliser un système actif d'échange de moment cinétique. Nous verrons dans ce Chapitre les raisons du choix des gyroscopes de commande de moment cinétique et les lois de commande des vitesses angulaires des armatures des gyroscopes.

4.1 Choix des gyroscopes de commande de moment cinétique (GCMC)

Avant d'aborder la question du choix, nous allons présenter les GCMC et leurs différents types. Schématiquement ils comprennent une roue, appelée rotor, tournant à grande vitesse dans une armature. Si on applique un couple perpendiculaire à l'axe de rotation du rotor, le mouvement de précession du rotor va entraîner l'apparition d'un couple sur un axe perpendiculaire au couple appliqué et à l'axe du rotor. On voit déjà apparaître deux types de gyroscopes suivant qu'on applique un seul couple sur un axe perpendiculaire à l'axe du rotor, et ce sont les GCMC à un degré de liberté (Figure 25), ou deux couples sur deux axes perpendiculaires entre eux et contenus dans un plan perpendiculaire à l'axe du rotor (Figure 26), et ce sont les GCMC à deux degrés de liberté.

On peut ajouter une troisième catégorie : les gyroscopes à trois degrés de liberté, le troisième degré de liberté étant obtenu en faisant varier la vitesse de rotation du rotor.

Les gyroscopes à un degré de liberté présentent l'intérêt de la simplicité mécanique (donc d'une meilleure fiabilité), d'une propriété d'amplification mécanique de couple (le gain ainsi obtenu peut atteindre quelques centaines [26]), d'une stabilité passive qui permet de garder une certaine stabilisation du satellite même en l'absence de signaux de senseurs [26 et 27]. Cependant ils ont des inconvénients

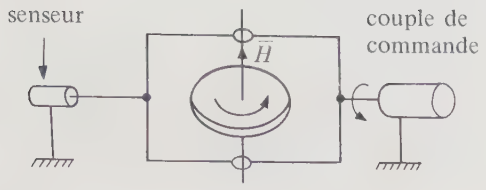


Figure 25
GCMC à un degré de liberté.

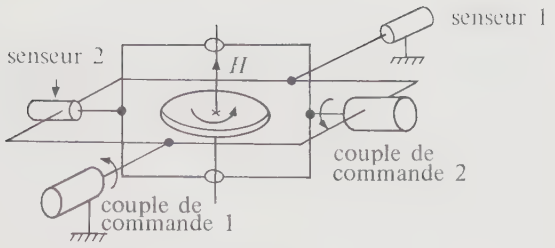


Figure 26
GCMC à deux degrés de liberté.

Figure 27
GCMC à suspension d'Euler.

Figure 28
GCMC à « coning suspension ».

qui nous amènent à les rejeter : en effet pour commander les trois axes, il est nécessaire d'utiliser trois gyroscopes, d'où un poids relativement élevé et une consommation de puissance assez grande, puisqu'une grande partie de la puissance est consommée dans le maintien de la vitesse de rotation du rotor. Par ailleurs le couple de réaction de chaque gyroscope ne s'exerce sur un seul axe du satellite que si le gyroscope est dans sa position nominale; si ce n'est pas le cas, les composantes de ce couple sur les deux autres axes sont d'autant plus importantes que l'angle entre l'armature et sa position nominale est plus grand. On doit donc limiter cet angle à de petites valeurs, mais alors on n'utilise qu'une fraction du moment cinétique stocké. Cependant il existe une configuration de 6 gyroscopes à un degré de liberté, appariés deux à deux, qui permet de minimiser, voire d'annuler, les effets du couplage des axes [27]; mais ceci au prix d'une augmentation du poids et de la puissance consommée. De plus, ce système ne présente aucune redondance. Tous ces inconvénients conduisent donc à éliminer cette configuration malgré ses importants avantages.

Les gyroscopes à deux degrés de liberté permettent d'utiliser plus complètement le moment cinétique du rotor puisqu'on peut le déplacer dans deux directions différentes. De plus, deux gyroscopes suffisent pour commander les trois axes du satellite; on dispose même d'un quatrième degré de liberté supplémentaire qui nous posera quelques problèmes, comme nous le verrons plus loin. La fiabilité peut être

améliorée considérablement si on prévoit la possibilité d'utiliser chaque gyroscope avec trois degrés de liberté, c'est-à-dire en commandant en plus la vitesse de rotation du rotor. Cependant utiliser seul un gyroscope à 2 degrés de liberté conduit à perdre la propriété d'amplification mécanique du couple. On montre cependant que cette propriété peut être de nouveau obtenue si on double chaque gyroscope par un autre gyroscope identique dont les armatures se déplacent en sens inverse avec l'aide d'une synchronisation mécanique et non par un servo-moteur [28]. La difficulté de réaliser la synchronisation mécanique des armatures intérieures des gyroscopes à suspension d'Euler (Figure 27) a conduit à imaginer un autre type de suspension appelée par les Anglo-Saxons « coning suspension » (Figure 28). Mais bien que les rotors puissent être alors de masse moindre, il en résulte cependant un accroissement de poids et de consommation de puissance avec, de plus, une plus grande complexité mécanique, ce qui nous a conduits à éliminer les gyroscopes appariés.

Nous avons choisi comme configuration deux gyroscopes à deux degrés de liberté à suspension d'Euler. Cette configuration est d'ailleurs l'une des quatre sélectionnées à l'issue d'une étude comparative des 17 configurations les plus intéressantes de GCMC à un ou deux degrés de liberté, qui a été faite pour l'ESTEC par Hawker Siddeley [29].

Il reste à montrer les avantages des GCMC par rapport aux roues d'inertie en termes de fiabilité, poids, puissance consommée, réponse en fréquence, pour notre satellite dont les dimensions sont relativement modestes (quelques centaines de kilogrammes, moments d'inertie de l'ordre de 150 à 200 kg-m^2). On sait que le couple de réaction est obtenu en commandant une vitesse pour les GCMC et une accélération pour les roues d'inertie. L'étude de Hawker Siddeley citée plus haut, se basant sur des données numériques, a montré que, pour des petits satellites, le poids et la consommation de puissance sont comparables pour les GCMC et pour les roues d'inertie dans les mêmes conditions et en tenant compte du poids et de la consommation de puissance des circuits électroniques nécessaires pour le découplage des GCMC. Par ailleurs, les constantes de temps des gyroscopes étant beaucoup plus faibles que celles des roues d'inertie [30], la bande passante des gyroscopes est nettement plus grande. Quant à la fiabilité, si on prévoit la possibilité d'utiliser chaque gyroscope avec trois degrés de liberté, les progrès actuels de la technologie permettent de l'assurer avec une valeur au moins aussi bonne, sinon meilleure que celle des roues d'inertie.

La configuration que nous allons étudier maintenant est schématisée par la Figure 29. Nous allons étudier les équations générales du mouvement et les lois de commande des armatures.

Les équations analytiques détaillées seront données en Annexe.

4.2 Équations générales du mouvement

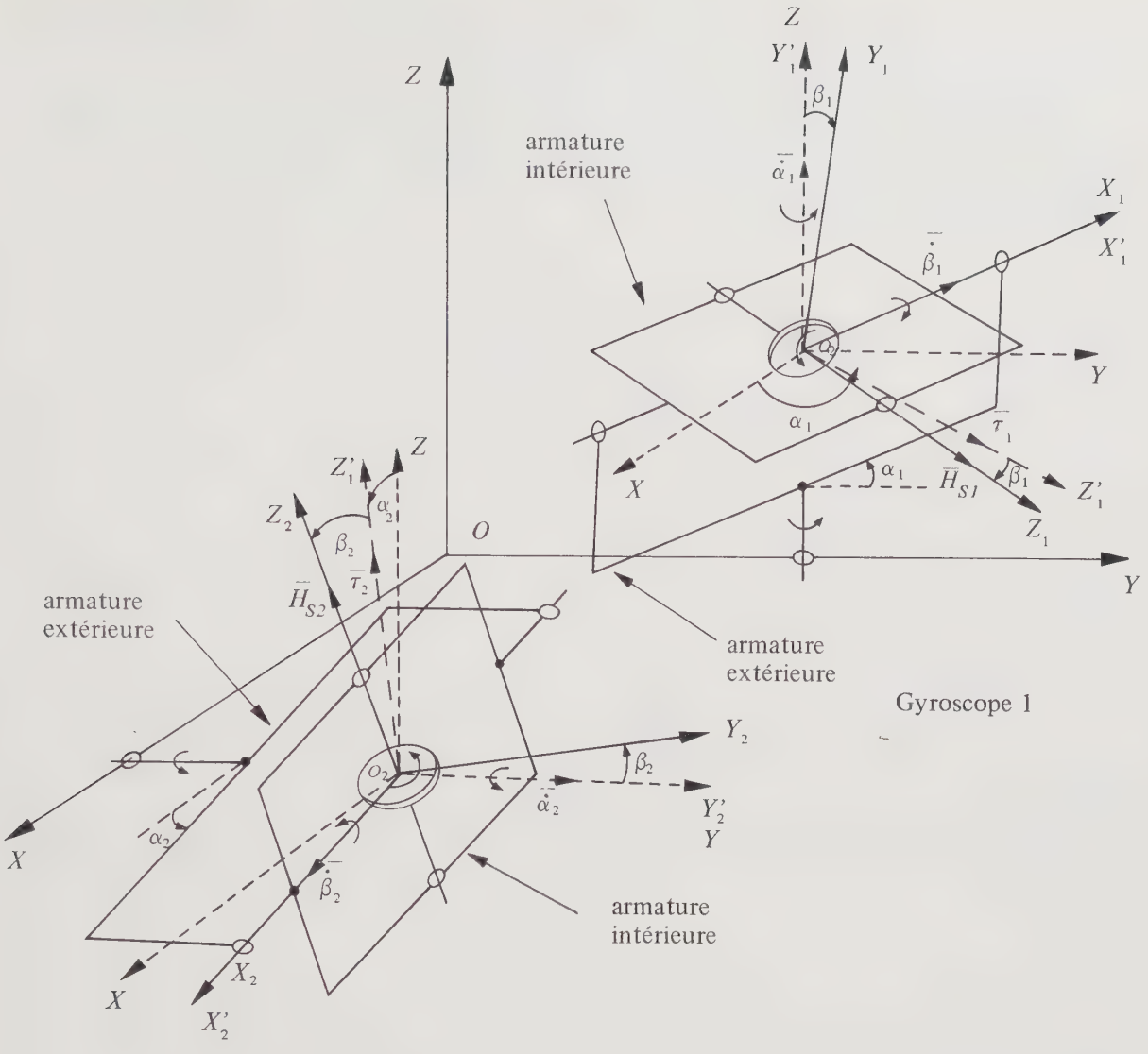
Les équations du mouvement des gyroscopes et du satellite peuvent être obtenues en appliquant directement les théorèmes généraux de la mécanique. Si nous appliquons la deuxième loi de Newton à notre satellite, et si nous appelons $\overline{H}_{tot}$ le vecteur moment cinétique total du satellite, nous pouvons écrire :

$$(\dot{\overline{H}}_{tot})_{abs} = \overline{T}_p \tag{4.1}$$

$\overline{T}_p$ représentant la somme des couples extérieurs appliqués au satellite. Or $\overline{H}_{tot}$ peut être décomposé en trois composantes : le moment cinétique $\overline{H}_v$ du satellite sans les gyroscopes, celui $\overline{H}_1$ du gyroscope 1 et celui $\overline{H}_2$ du gyroscope 2. Ceci permet d'écrire :

$$(\dot{\overline{H}}_v)_{abs} = \overline{T}_p + \overline{R} \tag{4.2}$$

avec $\overline{R} = -(\dot{\overline{H}}_1)_{abs} - (\dot{\overline{H}}_2)_{abs}$; $\overline{R}$ est le couple de réaction des gyroscopes sur le satellite. On voit que



Systèmes d'axes :

$OXYZ$: axes principaux du satellite

$O_1X'_1Y'_1Z'_1$: axes principaux de l'armature extérieure du gyroscope 1

$O_1X_1Y_1Z_1$: axes principaux de l'armature intérieure du gyroscope 1

$O_2X'_2Y'_2Z'_2$: axes principaux de l'armature extérieure du gyroscope 2

$O_2X_2Y_2Z_2$: axes principaux de l'armature intérieure du gyroscope 2.

Position nominale (quand les angles α_1, β_1, α_2 et β_2 sont nuls) :

$O_1X'_1$ et O_1X_1 parallèles à OY — *$O_1Y'_1$ et O_1Y_1 parallèles à OZ*

$O_1Z'_1$ et O_1Z_1 parallèles à OX — *$O_2X'_2$ et O_2X_2 parallèles à OX*

$O_2Y'_2$ et O_2Y_2 parallèles à OY — *$O_2Z'_2$ et O_2Z_2 parallèles à OZ.*

Figure 29.

si on peut modifier dans un repère absolu la direction du moment cinétique des gyroscopes, la quantité $\bar{R} = -(\dot{\bar{H}}_1)_{abs} - (\dot{\bar{H}}_2)_{abs}$ va varier et va pouvoir annuler $(\dot{\bar{H}}_v)_{abs}$.

De nouveau, nous pouvons décomposer en trois composantes le moment cinétique de chaque gyroscope : le moment cinétique $\bar{H}_S$ du spin seul du rotor, le moment cinétique $\bar{H}_O$ de l'armature extérieure et le moment cinétique $\bar{H}_I$ de l'armature intérieure et du rotor supposé immobile dans son armature. Pour chaque gyroscope :

$$\bar{H} = \bar{H}_S + \bar{H}_O + \bar{H}_I.$$

Si maintenant nous appelons $\bar{\omega}_I$ la vitesse angulaire absolue de l'armature intérieure, nous pouvons écrire :

$$(\dot{\bar{H}})_{abs} = (\dot{\bar{H}}_S)_{abs} + (\dot{\bar{H}}_O)_{abs} + (\dot{\bar{H}}_I)_{abs} \tag{4.3}$$

ou, en appliquant le théorème de Coriolis :

$$(\dot{\bar{H}})_{abs} = (\dot{\bar{H}}_S)_{IG} + (\dot{\bar{H}}_O)_{IG} + (\dot{\bar{H}}_I)_{IG} + \bar{\omega}_I \times (\bar{H}_O + \bar{H}_I + \bar{H}_S) \tag{4.4}$$

avec :

$$\bar{H}_O = \overleftrightarrow{I}_{OG}^{IG} \cdot \bar{\omega}_O^{IG} \qquad \text{et} \qquad \bar{H}_I = \overleftrightarrow{I}_{IG}^{IG} \cdot \bar{\omega}_I^{IG}.$$

où *IG* en indice indique la dérivation par rapport aux axes de l'armature intérieure ; $\overleftrightarrow{I}_{OG}^{IG}$ et $\overleftrightarrow{I}_{IG}^{IG}$ sont les tenseurs d'inertie de l'armature extérieure et de l'armature intérieure exprimés dans les axes de l'armature intérieure, et $\bar{\omega}_O^{IG}$ et $\bar{\omega}_I^{IG}$ sont les vitesses angulaires absolues $\bar{\omega}_O$ et $\bar{\omega}_I$ des armatures extérieure et intérieure exprimées dans les axes de l'armature intérieure.

Nous pouvons remarquer que le premier terme de (4.4) peut être supprimé dans le cas du gyroscope à deux degrés de liberté, car le rotor est alors animé d'une vitesse constante dans les axes du gyroscope :

$$(\dot{\bar{H}}_S)_{IG} = 0.$$

En explicitant analytiquement l'équation (4.4) par rapport à divers systèmes d'axes, on peut obtenir les équations de mouvement des armatures et des couples de réaction $\bar{R}$ des gyroscopes ; nous le ferons en Annexe.

4.3 Loi de commande des vitesses angulaires des armatures des gyroscopes

4.3.1 PROBLÈMES POSÉS PAR LA RECHERCHE DE CETTE LOI

Pour déterminer cette loi de commande, nous pouvons remarquer que les moments d'inertie des armatures des gyroscopes n'introduisent dans l'équation (4.4) que des termes petits par rapport aux termes $\bar{\omega}_I \times \bar{H}_S$ et $\dot{\bar{H}}_v$. En effet $\bar{H}_O \ll \bar{H}_S$, $\bar{H}_I \ll \bar{H}_S$, $\dot{\bar{H}}_O \ll \dot{\bar{H}}_v$, $\dot{\bar{H}}_I \ll \dot{\bar{H}}_v$.

Pour établir les lois de commande, nous allons donc remplacer l'équation (4.4) par l'équation approchée $(\dot{\bar{H}})_{abs} \# \bar{\omega}_I \times \bar{H}_S$;

d'où :

$$\bar{R} = -\bar{\omega}_1 \times \bar{H}_{S_1} - \bar{\omega}_2 \times \bar{H}_{S_2} \tag{4.5}$$

en posant :

$$\bar{\omega}_{I_1} = \bar{\omega}_1 \qquad \text{et} \qquad \bar{\omega}_{I_2} = \bar{\omega}_2.$$

Déterminer la loi de commande, c'est calculer $\bar{\omega}_1$ et $\bar{\omega}_2$ pour que le couple de réaction $\bar{R}$ soit égal à un facteur constant près à un vecteur $\bar{\varepsilon}$ construit à partir des informations des senseurs. Puisque nous voulons stabiliser et commander l'attitude du satellite dans trois axes, $\bar{\varepsilon}$ a trois dimensions. Or, les gyroscopes ont chacun deux degrés de liberté; par conséquent $\bar{\omega}_1$ et $\bar{\omega}_2$ ont chacun deux composantes sur lesquelles on peut agir, soit $\dot{\alpha}_1$ et $\dot{\beta}_1$ pour $\bar{\omega}_1$ et $\dot{\alpha}_2$ et $\dot{\beta}_2$ pour $\bar{\omega}_2$.

Le problème est maintenant de calculer $\dot{\alpha}_1, \dot{\beta}_1, \dot{\alpha}_2, \dot{\beta}_2$ en fonction de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. En d'autres termes, nous avons l'équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\beta}_2 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

et nous voulons calculer le vecteur $\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\beta}_2 \end{pmatrix}$ qui permette d'écrire : $\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$.

Il faut calculer la matrice inverse M^{-1}. Mais la matrice M n'est pas carrée et on sait qu'alors il n'existe pas d'inverse unique M^{-1}. On peut résoudre le problème en ajoutant une quatrième composante toujours nulle au vecteur $\bar{R}$:

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ O \end{pmatrix} = M' \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\beta}_2 \end{pmatrix}$$

et en s'arrangeant pour que le déterminant $|M'|$ ne soit jamais nul [29]. Mais l'application de cette méthode conduit à des calculs longs et compliqués. Aussi allons-nous chercher la solution par une autre approche du problème.

4.3.2 PREMIÈRE SOLUTION

On peut remarquer en effet que le couple de réaction de chaque gyroscope est perpendiculaire au moment cinétique du rotor $\bar{H}_S$ et à la vitesse angulaire de $\bar{H}_S$ suivant l'équation (4.5) et que le vecteur $\bar{H}_S$ doit se déplacer dans la direction du couple perturbateur extérieur pour que le couple de réaction résultant puisse l'annuler [29, 30 et 31]. Nous allons donc écrire :

$$\bar{\omega}_i = K_i \bar{H}_{Si} \times \bar{\varepsilon} \qquad \text{avec} \qquad i = 1, 2; \tag{4.7}$$

K_i étant une constante. Cette loi est développée dans l'étude de Hawker Siddeley. Mais utilisée ainsi, elle ne permet pas de tirer profit du quatrième degré de liberté. De plus, elle ne peut pas être rigoureusement appliquée en fait, puisqu'avec une suspension d'Euler on ne peut donner une vitesse exactement perpendiculaire à $\bar{H}_S$ sauf quand l'armature intérieure est dans sa position nominale. Aussi avons-nous cherché une loi qui va optimiser le déplacement de chaque rotor, grâce au quatrième degré de liberté disponible.

4.3.3 LOI OPTIMALE DE COMMANDE DES VITESSES ANGULAIRES DES ARMATURES

Si nous examinons la Figure 29, nous pouvons constater que les vecteurs vitesses $\bar{\omega}_1$ et $\bar{\omega}_2$ sont toujours contenus dans un plan perpendiculaire aux vecteurs $\bar{\tau}_1$ et $\bar{\tau}_2$ définis sur la Figure ($\bar{\tau}_1$ est la projection de $\bar{H}_{S1}$ sur un plan parallèle au plan XOY et $\bar{\tau}_2$ est la projection de $\bar{H}_{S2}$ sur un plan parallèle

au plan XOZ). Pour le gyroscope 1 en effet, si on néglige la contribution apportée par les vitesses angulaires du satellite, $\bar{\omega}_1$ a pour composantes $\dot{\bar{\alpha}}_1$ et $\dot{\bar{\beta}}_1$; $\dot{\bar{\alpha}}_1$ est porté par construction par un axe parallèle à l'axe OZ et est donc perpendiculaire à toute droite d'un plan parallèle au plan XOY donc, en particulier, à $\bar{\tau}_1$; $\dot{\bar{\beta}}_1$ est de même porté par l'axe O_1X_1' perpendiculaire au plan $Y_1'O_1Z_1'$ et, par conséquent, à $\bar{\tau}_1$. Le raisonnement est identique pour $\bar{\omega}_2$ et $\bar{\tau}_2$. Au lieu de (4.7), on va donc écrire :

$$\begin{cases} \bar{\omega}_1 = \bar{\tau}_1 \times \bar{\varepsilon} \\ \bar{\omega}_2 = \bar{\tau}_2 \times \bar{\varepsilon} \end{cases} \tag{4.8}$$

Pour orienter les rotors au mieux en utilisant le quatrième degré de liberté, nous allons maintenant nous demander s'il n'est pas possible de remplacer $\bar{\varepsilon}$ dans les équations (4.8) par un autre vecteur $\bar{\varepsilon}'$ qui tiendrait compte à la fois du vecteur erreur $\bar{\varepsilon}$ et de la position de l'autre gyroscope. Nous allons donc écrire :

$$\begin{cases} \bar{\omega}_1 = \bar{\tau}_1 \times (\bar{a}_1 + \bar{\varepsilon}) \\ \bar{\omega}_2 = \bar{\tau}_2 \times (\bar{a}_2 + \bar{\varepsilon}) \end{cases} \tag{4.9}$$

Pour déterminer $\bar{a}_1$ et $\bar{a}_2$, nous allons remplacer dans (4.5) $\bar{\omega}_1$ et $\bar{\omega}_2$ par leur valeur donnée par (4.9) :

$$\bar{R} = -[\bar{\tau}_1 \times (\bar{a}_1 + \bar{\varepsilon})] \times \bar{H}_{S1} - [\bar{\tau}_2 \times (\bar{a}_2 + \bar{\varepsilon})] \times \bar{H}_{S2}.$$

D'où après développement des doubles produits vectoriels et regroupement :

$$\bar{R} = [\bar{H}_{S1} \cdot (\bar{a}_1 + \bar{\varepsilon})]\,\bar{\tau}_1 - (\bar{H}_{S1} \cdot \bar{\tau}_1)\,\bar{a}_1 + [\bar{H}_{S2} \cdot (\bar{a}_2 + \bar{\varepsilon})]\,\bar{\tau}_2 - (\bar{H}_{S2} \cdot \bar{\tau}_2)\,\bar{a}_2 - (\bar{H}_{S1} \cdot \bar{\tau}_1 + \bar{H}_{S2} \cdot \bar{\tau}_2)\,\bar{\varepsilon}. \tag{4.10}$$

Comme nous désirons écrire évidemment : $\bar{R} = -(\bar{H}_{S1} \cdot \bar{\tau}_1 + \bar{H}_{S2} \cdot \bar{\tau}_2)\,\bar{\varepsilon}$, nous avons deux possibilités pour annuler les autres termes :

a) écrire que nous avons simultanément

$$\begin{cases} (\bar{H}_{S1} \cdot \bar{\tau}_1)\,\bar{a}_1 = [\bar{H}_{S1} \cdot (\bar{a}_1 + \bar{\varepsilon})]\,\bar{\tau}_1 \\ (\bar{H}_{S2} \cdot \bar{\tau}_2)\,\bar{a}_2 = [\bar{H}_{S2} \cdot (\bar{a}_2 + \bar{\varepsilon})]\,\bar{\tau}_2 \end{cases} \tag{4.11}$$

mais ceci ne convient pas puisque nous aurions alors $\bar{a}_1$ parallèle à $\bar{\tau}_1$ et $\bar{a}_2$ parallèle à $\bar{\tau}_2$, ce qui impliquerait que les équations (4.9) se réduisent aux équations (4.8), car $\bar{\tau}_1 \times \bar{\tau}_1 = 0$;

b) ou bien écrire que

$$\begin{cases} (\bar{H}_{S1} \cdot \bar{\tau}_1)\,\bar{a}_1 = [\bar{H}_{S2} \cdot (\bar{a}_2 + \bar{\varepsilon})]\,\bar{\tau}_2 \\ (\bar{H}_{S2} \cdot \bar{\tau}_2)\,\bar{a}_2 = [\bar{H}_{S1} \cdot (\bar{a}_1 + \bar{\varepsilon})]\,\bar{\tau}_1. \end{cases} \tag{4.12}$$

Par conséquent, le vecteur $\bar{a}_1$ est parallèle à $\bar{\tau}_2$ et $\bar{a}_2$ à $\bar{\tau}_1$.

Pour déterminer les coefficients de proportionnalité, nous écrivons : $\bar{a}_1 = K_1\,\bar{\tau}_2$ et $\bar{a}_2 = K_2\,\bar{\tau}_1$ et nous portons $\bar{a}_1$ et $\bar{a}_2$ dans (4.12). Ceci donne le système d'équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} K_1\,(\bar{H}_{S1} \cdot \bar{\tau}_1) - K_2\,(\bar{H}_{S2} \cdot \bar{\tau}_1) = \bar{H}_{S2} \cdot \bar{\varepsilon} \\ -K_1\,(\bar{H}_{S1} \cdot \bar{\tau}_2) + K_2\,(\bar{H}_{S2} \cdot \bar{\tau}_2) = \bar{H}_{S1} \cdot \bar{\varepsilon} \end{cases} \tag{4.13}$$

Ce système a deux racines si le déterminant Δ n'est pas nul, c'est-à-dire si :

$$\Delta = (\overline{H}_{S1} \cdot \overline{\tau}_1)(\overline{H}_{S2} \cdot \overline{\tau}_2) - (\overline{H}_{S1} \cdot \overline{\tau}_2)(\overline{H}_{S2} \cdot \overline{\tau}_1) \neq 0. \tag{4.14}$$

Ce déterminant peut aussi être mis sous la forme :

$$\Delta = (\overline{H}_{S1} \times \overline{H}_{S2}) \cdot (\overline{\tau}_1 \times \overline{\tau}_2). \tag{4.15}$$

Cette forme nous sera utile plus loin pour l'étude des cas particuliers. Ainsi si $\Delta \neq 0$, nous aurons :

$$\begin{cases} K_1 = \dfrac{(\overline{H}_{S1} \cdot \overline{\varepsilon})(\overline{H}_{S2} \cdot \overline{\tau}_1) + (\overline{H}_{S2} \cdot \overline{\varepsilon})(\overline{H}_{S2} \cdot \overline{\tau}_2)}{(\overline{H}_{S1} \times \overline{H}_{S2}) \cdot (\overline{\tau}_1 \times \overline{\tau}_2)} \\ K_2 = \dfrac{(\overline{H}_{S2} \cdot \overline{\varepsilon})(\overline{H}_{S1} \cdot \overline{\tau}_2) + (\overline{H}_{S1} \cdot \overline{\varepsilon})(\overline{H}_{S1} \cdot \overline{\tau}_1)}{(\overline{H}_{S1} \times \overline{H}_{S2}) \cdot (\overline{\tau}_1 \times \overline{\tau}_2)} \end{cases} \tag{4.16}$$

avec les lois

$$\overline{\omega}_1 = \overline{\tau}_1 \times (K_1 \overline{\tau}_2 + \overline{\varepsilon}) \qquad \text{et} \qquad \overline{\omega}_2 = \overline{\tau}_2 \times (K_2 \overline{\tau}_1 + \overline{\varepsilon}). \tag{4.17}$$

Remarques :

Si au lieu d'écrire :

$$\overline{\omega}_1 = \overline{\tau}_1 \times (\overline{a}_1 + \overline{\varepsilon}) \qquad \text{et} \qquad \overline{\omega}_2 = \overline{\tau}_2 \times (\overline{a}_2 + \overline{\varepsilon}),$$

nous avions écrit :

$$\overline{\omega}_1 = \overline{H}_{S1} \times (\overline{a}_1 + \overline{\varepsilon}) \qquad \text{et} \qquad \overline{\omega}_2 = \overline{H}_{S2} \times (\overline{a}_2 + \overline{\varepsilon}),$$

nous aurions obtenu des lois du même type :

$$\overline{\omega}_1 = \overline{H}_{S1} \times (K'_1 \overline{H}_{S2} + \overline{\varepsilon}) \qquad \text{et} \qquad \overline{\omega}_2 = \overline{H}_{S2} \times (K'_2 \overline{H}_{S1} + \overline{\varepsilon}),$$

K'_1 et K'_2 ayant des expressions analogues à K_1 et K_2 en remplaçant $\overline{\tau}_1$ et $\overline{\tau}_2$ par $\overline{H}_{S1}$ et $\overline{H}_{S2}$. L'avantage qui en résulte est de simplifier le calcul des coefficients K'_1 et K'_2; mais par contre les produits vectoriels $\overline{H}_{S1} \times \overline{H}_{S2}$, $\overline{H}_{S1} \times \overline{\varepsilon}$ et $\overline{H}_{S2} \times \overline{\varepsilon}$ sont plus longs à calculer que les produits $\overline{\tau}_1 \times \overline{\tau}_2$, $\overline{\tau}_1 \times \overline{\varepsilon}$ et $\overline{\tau}_2 \times \overline{\varepsilon}$ en raison des particularités de construction des vecteurs $\overline{\tau}_1$ et $\overline{\tau}_2$. Donc au total la complexité du calcul est comparable dans les deux cas. Nous ajouterons qu'il n'est pas possible mécaniquement avec deux degrés de liberté de donner aux rotors les vitesses calculées par cette dernière loi alors que ceci est réalisé pour la loi (4.16) - (4.17) avec exactitude si les vitesses angulaires du satellite sont nulles, ou avec une bonne approximation si elles ne sont pas nulles.

4.3.4 CAS PARTICULIERS

Il nous faut voir maintenant les cas où cette loi risque de ne pas donner satisfaction. Nous étudierons donc les cas où $\Delta = 0$, où $\overline{\omega}_1 = 0$, où $\overline{\omega}_2 = 0$ et où $\overline{R} = 0$ bien que $\overline{\varepsilon} \neq 0$.

4.3.4.1 **Cas $\Delta = 0$**

D'après (4.15), $\Delta = 0$ dans trois cas : si $\overline{\tau}_1$ est parallèle à $\overline{\tau}_2$, si $\overline{H}_{S1}$ est parallèle à $\overline{H}_{S2}$ ou si $(\overline{H}_{S1} \times \overline{H}_{S2})$ est perpendiculaire à $(\overline{\tau}_1 \times \overline{\tau}_2)$. Pour étudier ces cas, introduisons les vitesses :

$$\overline{\omega}'_1 = K_1 \overline{\tau}_1 \times \overline{\tau}_2 \qquad \text{et} \qquad \overline{\omega}'_2 = K_2 \overline{\tau}_2 \times \overline{\tau}_1.$$

a) L'examen de la Figure 29 montre que le cas $\bar{\tau}_1$ parallèle à $\bar{\tau}_2$ est un cas qui a une probabilité très faible de se produire. En effet, par construction $\bar{\tau}_1$ est dans un plan parallèle au plan XOY et $\bar{\tau}_2$ dans un plan parallèle au plan XOZ. Pour que $\bar{\tau}_1$ soit parallèle à $\bar{\tau}_2$, il faut donc que $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ à π près. Si $\bar{\tau}_1$ et $\bar{\tau}_2$ sont presque parallèles, nous pouvons écrire que $\bar{\tau}_1 \times \bar{\tau}_2 = \bar{c}$, $\bar{c}$ étant un vecteur petit. Alors les modules de $\bar{\omega}'_1$ et de $\bar{\omega}'_2$ s'écrivent :

$$\begin{cases} |\bar{\omega}'_1| = \dfrac{|(\bar{H}_{S1} \cdot \bar{\varepsilon})(\bar{H}_{S2} \cdot \bar{\tau}_1) + (\bar{H}_{S2} \cdot \bar{\varepsilon})(\bar{H}_{S2} \cdot \bar{\tau}_2)|}{|\bar{H}_{S1} \times \bar{H}_{S2}|\,|\bar{c}|\,|\cos\theta|}\,|\bar{c}| \\ |\bar{\omega}'_2| = \dfrac{|(\bar{H}_{S2} \cdot \bar{\varepsilon})(\bar{H}_{S1} \cdot \bar{\tau}_2) + (\bar{H}_{S1} \cdot \bar{\varepsilon})(\bar{H}_{S1} \cdot \bar{\tau}_1)|}{|\bar{H}_{S1} \times \bar{H}_{S2}|\,|\bar{c}|\,|\cos\theta|}\,|\bar{c}| \end{cases}$$

θ étant l'angle des vecteurs $(\bar{H}_{S1} \times \bar{H}_{S2})$ et $(\bar{\tau}_1 \times \bar{\tau}_2) = \bar{c}$. On voit immédiatement que l'indétermination sur le module de $\bar{\omega}'_1$ et de $\bar{\omega}'_2$ est levée. Ce cas n'est donc pas un problème sauf si $\bar{\varepsilon}$ est en plus parallèle à $\bar{\tau}_1$ et à $\bar{\tau}_2$, ce qui est un cas de saturation, comme nous le verrons plus loin.

b) Pour étudier le cas $\bar{H}_{S1}$ parallèle à $\bar{H}_{S2}$, nous allons supposer, là encore, que $\bar{H}_{S1}$ et $\bar{H}_{S2}$ sont très voisins de telle sorte que $\bar{H}_{S1} \times \bar{H}_{S2} = \bar{c}'$, $\bar{c}'$ étant un vecteur petit. En remplaçant, dans les expressions de $\bar{\omega}'_1$ et $\bar{\omega}'_2$, $\bar{H}_{S2}$ par $\bar{H}_{S1}$ et $\bar{H}_{S1} \times \bar{H}_{S2}$ par $\bar{c}'$, nous pouvons constater que $\bar{\omega}'_1 \to -\bar{\omega}'_2$, $\bar{\omega}'_1$ et $\bar{\omega}'_2$ tendant tous les deux vers l'infini.

Par conséquent, $\bar{\omega}'_1$ et $\bar{\omega}'_2$ constituent des vecteurs qui vont tendre à écarter le plus possible les deux rotors l'un de l'autre. Le cas $\bar{H}_{S1}$ parallèle à $\bar{H}_{S2}$ n'est donc pas un cas d'équilibre stable.

c) De la même façon, le cas $(\bar{H}_{S1} \times \bar{H}_{S2})$ perpendiculaire à $(\bar{\tau}_1 \times \bar{\tau}_2)$ n'est pas un cas d'équilibre stable puisque $\bar{\omega}'_1$ et $\bar{\omega}'_2$ tendent vers l'infini dans ce cas. Leur direction est cependant difficile à déterminer à cause du nombre de degrés de liberté.

4.3.4.2 Cas $\bar{\omega}_1 = 0$ quel que soit $\bar{\varepsilon}$

Ce cas se produit si nous avons $\bar{\omega}_1 = \bar{\tau}_1 \times (K_1\bar{\tau}_2 + \bar{\varepsilon}) = 0$ c'est-à-dire si $K_1\bar{\tau}_2 + \bar{\varepsilon} = 0$ ou $\bar{\tau}_1$ parallèle à $(K_1\bar{\tau}_2 + \bar{\varepsilon})$.

a) Le cas $K_1\bar{\tau}_2 + \bar{\varepsilon} = 0$ implique que $\bar{\tau}_2$ et $\bar{\varepsilon}$ sont colinéaires; alors $\bar{\tau}_2 = K_3\bar{\varepsilon}$ ou $K_1K_3 + 1 \neq 0$, ou, en explicitant K_1 et en supposant que $\Delta \neq 0$:

$$K_3[(\bar{H}_{S1} \cdot \bar{\varepsilon})(\bar{H}_{S2} \cdot \bar{\tau}_1) + (\bar{H}_{S2} \cdot \bar{\varepsilon})(\bar{H}_{S2} \cdot \bar{\tau}_2)] + (\bar{H}_{S1} \cdot \bar{\tau}_1)(\bar{H}_{S2} \cdot \bar{\tau}_2) - (\bar{H}_{S1} \cdot \bar{\tau}_2)(\bar{H}_{S2} \cdot \bar{\tau}_1) = 0$$

ou, après simplification :

$$K_3(\bar{H}_{S2} \cdot \bar{\varepsilon})^2 + (\bar{H}_{S1} \cdot \bar{\tau}_1)(\bar{H}_{S2} \cdot \bar{\varepsilon}) = 0 \tag{4.18}$$

Ce cas peut donc se présenter dans deux circonstances :

- si $\bar{H}_{S2} \cdot \bar{\varepsilon} = 0$ c'est-à-dire $\bar{H}_{S2}$ perpendiculaire à $\bar{\varepsilon}$,
- ou si $K_3(\bar{H}_{S2} \cdot \bar{\varepsilon}) + \bar{H}_{S1} \cdot \bar{\tau}_1 = 0$, c'est-à-dire, puisque $K_3\bar{\varepsilon} = \bar{\tau}_2$, si $\bar{H}_{S2} \cdot \bar{\tau}_2 + \bar{H}_{S1} \cdot \bar{\tau}_1 = 0$. Ce dernier cas nous envoie au cas $\bar{R} = 0$ que nous étudierons plus loin. Quant au cas $\bar{H}_{S2}$ perpendiculaire à $\bar{\varepsilon}$, il se ramène au cas $\bar{H}_{S2}$ perpendiculaire à $\bar{\tau}_2$, cas que nous traiterons avec le cas $\bar{R} = 0$.

b) Le cas $\bar{\tau}_1$ parallèle à $(K_1\bar{\tau}_2 + \bar{\varepsilon})$ peut être réécrit sous la forme :

$$\bar{\tau}_1 = K_4(K_1\bar{\tau}_2 + \bar{\varepsilon}). \tag{4.19}$$

Il faut noter que c'est un cas d'équilibre instable sauf si $\bar{\omega}_2 = 0$. En effet, si $\bar{\omega}_2 \neq 0$, $\bar{\tau}_2$ va se déplacer et nous n'aurons plus :

$$\bar{\tau}_1 = K_4 (K_1 \bar{\tau}_2 + \bar{\varepsilon}).$$

Nous allons donc étudier ce cas en supposant qu'en plus $\bar{\omega}_2 = 0$. Or $\bar{\omega}_2 = \bar{\tau}_2 \times (K_2 \bar{\tau}_1 + \bar{\varepsilon})$ peut s'écrire, en remplaçant $\bar{\tau}_1$ par sa valeur dans ce cas :

$$\bar{\omega}_2 = \bar{\tau}_2 \times [K_2 K_4 (K_1 \bar{\tau}_2 + \bar{\varepsilon}) + \bar{\varepsilon}] = (K_2 K_4 + 1) \bar{\tau}_2 \times \bar{\varepsilon}.$$

Il y a deux possibilités pour avoir $\bar{\omega}_2 = 0$ avec $\bar{\tau}_1 = K_4 (K_1 \bar{\tau}_2 + \bar{\varepsilon})$:

- avoir $\bar{\tau}_2 \times \bar{\varepsilon} = 0$, c'est-à-dire $\bar{\tau}_2$ parallèle à $\bar{\varepsilon}$, d'où en revenant à (4.19) : $\bar{\tau}_1$ parallèle à $\bar{\tau}_2$ et parallèle à $\bar{\varepsilon}$ et nous retrouvons un cas de saturation déjà signalé;
- ou bien avoir $K_2 K_4 + 1 = 0$, condition qui donne, en remplaçant K_1 par son expression et après quelques manipulations :

$$(\bar{H}_{S1} \cdot \bar{\varepsilon}) (\bar{H}_{S1} \cdot \bar{\tau}_1 + \bar{H}_{S2} \cdot \bar{\tau}_2) = 0.$$

Là encore deux solutions : $\bar{H}_{S1} \cdot \bar{\tau}_1 + \bar{H}_{S2} \cdot \bar{\tau}_2 = 0$, c'est le cas $\bar{R} = 0$; ou bien $\bar{H}_{S1} \cdot \bar{\varepsilon} = 0$.

Pour discuter ce dernier cas, nous allons revenir à (4.19) qui permet d'écrire :

$$\bar{\tau}_1 = K_4 \left[\frac{(\bar{H}_{S1} \cdot \bar{\varepsilon}) (\bar{H}_{S2} \cdot \bar{\tau}_1) + (\bar{H}_{S2} \cdot \bar{\varepsilon}) (\bar{H}_{S2} \cdot \bar{\tau}_2)}{(\bar{H}_{S1} \cdot \bar{\tau}_1) (\bar{H}_{S2} \cdot \bar{\tau}_2) - (\bar{H}_{S1} \cdot \bar{\tau}_2) (\bar{H}_{S2} \cdot \bar{\tau}_1)} \bar{\tau}_2 + \bar{\varepsilon} \right].$$

En remarquant que nous avons ici $\bar{H}_{S1} \cdot \bar{\varepsilon} = 0$, après quelques transformations, nous retrouvons encore la condition $\bar{H}_{S1} \cdot \bar{\tau}_1 + \bar{H}_{S2} \cdot \bar{\tau}_2 = 0$. Donc le cas $\bar{\tau}_1$ parallèle à $(K_1 \bar{\tau}_2 + \bar{\varepsilon})$ ne peut présenter de problème que si $\bar{R} = 0$.

4.3.4.3 Autres cas

a) Le cas $\bar{\omega}_2 = 0$ peut être étudié par la même méthode et donne alors les mêmes résultats.

b) Il reste à considérer le cas $\bar{R} = 0$ que nous avons rencontré à plusieurs reprises. Ce cas est équivalent, on le sait, à : $\bar{H}_{S1} \cdot \bar{\tau}_1 + \bar{H}_{S2} \cdot \bar{\tau}_2 = 0$. Ce cas peut être évité de plusieurs façons : en posant $\bar{\tau}_1 = \bar{b}_1 \cos \beta_1$ et $\bar{\tau}_2 = \bar{b}_2 \cos \beta_2$, $\bar{b}_1$ et $\bar{b}_2$ étant des vecteurs constants en module; ou encore en écrivant que :

$$\bar{\tau}_1 = \frac{\bar{b}_1}{\cos \beta_1} \quad \text{et} \quad \bar{\tau}_2 = \frac{\bar{b}_2}{\cos \beta_2}.$$

Dans le premier cas, on obtient :

$$\bar{R} = - (H_{S1} b_1 \cos^2 \beta_1 + H_{S2} b_2 \cos^2 \beta_2) \bar{\varepsilon}$$

qui ne peut être nul que si $\cos \beta_1 = \cos \beta_2 = 0$.

Dans le second cas, on a :

$$\bar{R} = - (H_{S1} b_1 + H_{S2} b_2) \bar{\varepsilon}$$

et le découplage est alors parfait. Mais en pratique, dans les deux cas, on va limiter β_1 et β_2 de telle sorte que cos β_1 et cos β_2 ne soient jamais nuls; on évite ainsi que $\bar{R} = 0$ ou que $\bar{\tau}_1$ et $\bar{\tau}_2$ ne tendent vers l'infini. On peut remarquer en outre que si β_1 et β_2 sont limités à $\pi/2$, des valeurs constantes données

à $|\bar{\tau}_1|$ et à $|\bar{\tau}_2|$ ne permettent pas d'avoir $\bar{R} = 0$; ceci peut être une troisième solution. La solution préférée est bien entendu la deuxième, qui permet un découplage parfait.

c) Nous avons rencontré un autre cas de saturation : $\bar{\tau}_1$ est parallèle à $\bar{\tau}_2$ et à $\bar{\varepsilon}$. Il s'agit d'un cas où la loi de commande ne convient pas. Mais étant donné la position particulière de $\bar{\tau}_1$ et de $\bar{\tau}_2$, ce cas peut être évité en empêchant seulement $|\alpha_1|$ d'atteindre la valeur de $\pi/2$.

d) Enfin, il faut noter un dernier cas de saturation commun à tous les GCMC : si on revient à l'expression de départ du couple de réaction $\bar{R} = -\bar{\omega}_1 \times \bar{H}_{S1} - \bar{\omega}_2 \times \bar{H}_{S2}$, il est aisé de constater sur cette formule que si $\bar{H}_{S1}$ et $\bar{H}_{S2}$ sont parallèles à $\bar{\varepsilon}$ et orientés dans le même sens, il n'existe aucune valeur de $\bar{\omega}_1$ et de $\bar{\omega}_2$ qui permette d'obtenir le couple de réaction $\bar{R} = -\bar{\varepsilon}$.

4.3.4.4 Conclusion

L'étude des différents cas particuliers possibles nous a montré que seuls trois d'entre eux présentent des cas de saturation pour notre loi de commande et nécessitent une désaturation des gyroscopes :

- le cas $\bar{R} = 0$: les gyroscopes devront être désaturés avant que $|\beta_1|$ et $|\beta_2|$ n'atteignent la valeur de $\pi/2$;
- le cas $\bar{\tau}_1$ parallèle à $\bar{\tau}_2$ et parallèle à $\bar{\varepsilon}$: le gyroscope 1 devra être désaturé avant que $|\alpha_1|$ n'atteigne la valeur de $\pi/2$;
- le cas $\bar{H}_{S1}$ parallèle à $\bar{H}_{S2}$ et parallèle à $\bar{\varepsilon}$: là encore les gyroscopes devront être désaturés.

4.4 Conclusion

Ce Chapitre nous a permis d'obtenir les équations vectorielles du mouvement des gyroscopes et de leur couple de réaction et de déterminer la loi de commande des vitesses angulaires des armatures des gyroscopes : le couple de réaction sur le satellite est alors proportionnel au vecteur erreur $\bar{\varepsilon}$. En Annexe, nous donnerons les équations analytiques complètes du mouvement et de la loi de commande.

Cette étude doit être maintenant complétée par deux autres parties : la formation du vecteur erreur qui permet de calculer les vitesses angulaires des armatures et la loi de commande des moteurs des armatures qui permettent leur mouvement; ce sera l'objet du Chapitre 5. Alors nous aurons étudié les différents éléments de la commande et de la stabilisation d'attitude par gyroscopes de commande de moment cinétique dont un schéma fonctionnel peut être donné par la Figure 30.

5. FORMATION DU VECTEUR ERREUR LOI DE COMMANDE DES MOTEURS DES ARMATURES

Nous allons étudier tout d'abord la formation du vecteur erreur $\bar{\varepsilon}$ à partir des informations dont nous disposons. Ceci nous permettra d'obtenir, à partir des équations analytiques détaillées données en Annexe, un système complet d'équations simplifiées sur lesquelles nous ferons notre étude. L'étude théorique littérale étant très complexe, même sur ces équations simplifiées, nous avons simulé celles-ci sur calculateur analogique. Aussi, dans un court paragraphe donnerons-nous les valeurs numériques utilisées. Nous aborderons ensuite l'étude de la loi de commande des couples moteurs. Et ce Chapitre se terminera en montrant les performances de notre système.

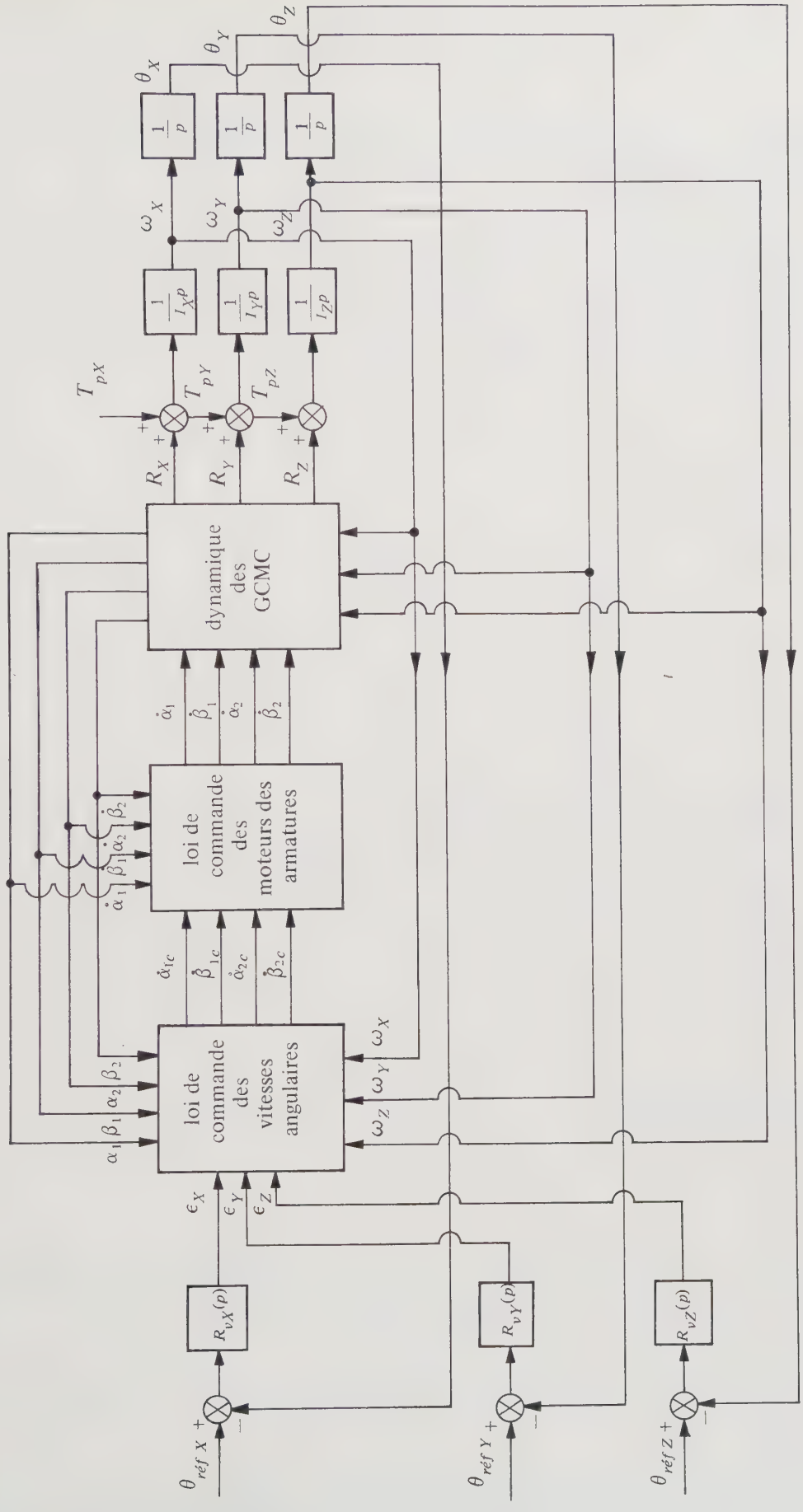


Figure 30 : Commande et stabilisation d'attitude par gyroscopes de commande de moment cinétique.

5.1 Formation du vecteur erreur

Les signaux d'erreur viennent de deux sources : d'une part des senseurs de vitesse, qui sont les gyroscopes de vitesse dont nous avons déjà parlé; d'autre part, des senseurs de position, senseurs d'étoile et/ou plate-forme inertielle.

Si nous utilisons les lois de découplage que nous avons longuement développées et que nous négligeons les constantes de temps des gyroscopes devant celles du satellite, nous pouvons écrire en première approximation que $\bar{R} = K\bar{\varepsilon}$. Par conséquent, puisque nous négligeons les termes de couplage des équations du satellite, l'étude de la formation de $\bar{\varepsilon}$ peut se faire en ne considérant qu'un seul axe; d'où le schéma fonctionnel de la Figure 31.

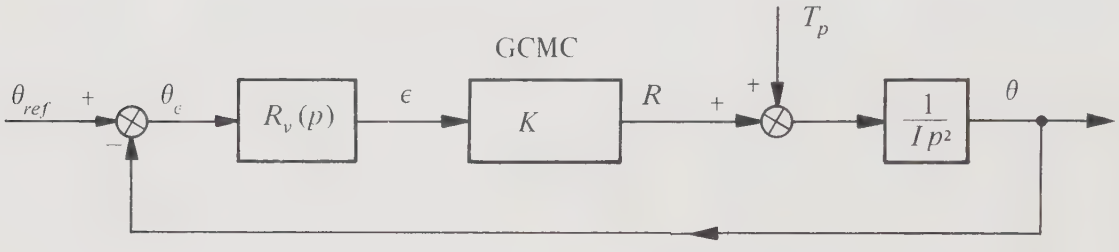


Figure 31.

La fonction de transfert en boucle ouverte est donc :

$$T(p) = \frac{\theta}{\theta\varepsilon} = \frac{K R_v(p)}{I p^2} \tag{5.1}$$

En boucle fermée, nous avons :

— en supposant $T_p = 0$:

$$\frac{\theta}{\theta_{réf}} = \frac{K R_v(p)}{I p^2 + K R_v(p)} \tag{5.2}$$

— en supposant $\theta_{réf} = 0$:

$$\frac{\theta}{T_p} = \frac{1}{I p^2 + K R_v(p)}. \tag{5.3}$$

Les équations (5.2) et (5.3) permettent donc de constater que, si $R_v(p)$ ne comporte qu'un terme proportionnel et un terme dérivé, le satellite s'orientera correctement quelques secondes après l'ordre de réorientation, mais que, par contre, en présence d'un couple perturbateur constant d'amplitude G (exprimé en newtons-mètres), il gardera un dépointage constant d'amplitude $\frac{G}{KK_v}$, K_v étant le gain statique de $R_v(p)$. Pour supprimer ce dépointage constant, il suffit d'ajouter un terme intégral : nous prendrons donc :

$$R_v(p) = K_v\left(1 + T_{v1}\, p + \frac{1}{T_{v2}\, p}\right). \tag{5.4}$$

La fonction de transfert en boucle ouverte devient :

$$T_v(p) = \frac{KK_v\left(1 + T_{v1}\,p + \dfrac{1}{T_{v2}\,p}\right)}{I\,p^2} \tag{5.5}$$

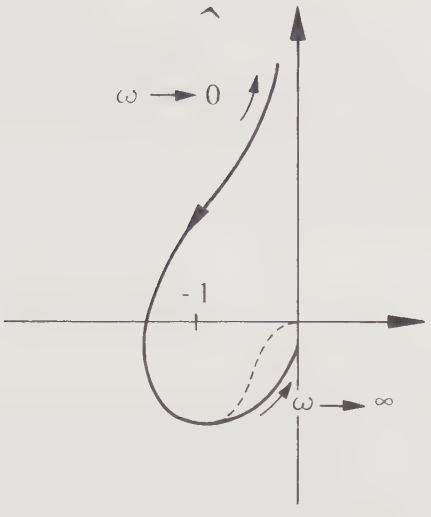


Figure 32.

La Figure 32 en donne la représentation schématique dans le plan de Nyquist. On doit noter que si ω tend vers l'infini, la courbe représentant $T_v(p)$ se rapproche de l'origine en devenant tangente à l'axe imaginaire; mais comme, en fait, nous avons négligé des constantes de temps, la courbe réelle tend vers l'origine en devenant tangente plutôt à l'axe réel (courbe en pointillés). Cette courbe nous permet cependant d'affirmer, d'après le critère du revers, que le système ne sera stable que si le gain KK_v est assez grand. Nous en verrons plus loin la détermination.

Le choix de T_{v1} et T_{v2} peut se faire en considérant l'équation caractéristique :

$$D(p) = IT_{v2}\,p^3 + KK_v\,(T_{v1}\,T_{v2}\,p^2 + T_{v2}\,p + 1) \tag{5.6}$$

On sait qu'un système dont l'équation caractéristique est du troisième degré est suffisamment amorti si les trois racines de l'équation caractéristique sont égales. Si on pose $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{KK_v}{3\,I}}$, on trouve ainsi :

$$T_{v1} = 1/\omega_0 \qquad \text{et} \qquad T_{v2} = 3/\omega_0.$$

Avec $KK_v = 80$ et $I = 150$, ceci donne :

$$\omega_0 = 0{,}24 \text{ rad/s}$$

d'où :

$$T_{v1} = 4{,}2 \text{ s} \qquad \text{et} \qquad T_{v2} = 12{,}6 \text{ s}$$

Étant donné que ces paramètres ont été calculés en faisant des approximations, il ne constituent qu'un ordre de grandeur. Pour faire les simulations analogiques, nous avons pris les valeurs suivantes : $T_{v1} = 5$ s et $T_{v2} = 10$ s. Le gain K_v a été choisi égal à 10 pour les axes OX et OY de moments

d'inertie évalués à 150 kg-m² et égal à 13,33 pour l'axe OZ de moment d'inertie 200 kg-m², de sorte qu'on ait $\frac{K_{vX}}{I_X} = \frac{K_{vY}}{I_Y} = \frac{K_{vZ}}{I_Z}$. Cette relation nous permettra plus loin de simplifier des expressions.

5.2 Linéarisation des équations

L'optimisation de la loi de commande des moteurs étant très difficile sur les équations complètes données en Annexe, nous avons fait les approximations indiquées en Annexe et nous nous sommes placés dans le cas où les angles des armatures des gyroscopes sont petits. Les résultats essentiels pouvant être obtenus en étudiant un seul gyroscope, nous nous contenterons d'écrire les équations simplifiées et linéarisées du gyroscope 1 de la Figure 29 et de faire l'optimisation à partir de ces équations. Un seul gyroscope ne pouvant commander que deux axes, nous n'écrirons les équations que pour les axes OY et OZ; la simulation analogique a montré d'ailleurs qu'aux petits angles le couplage de ces deux axes avec le troisième est négligeable. Pour le satellite, nous considérerons donc les équations :

$$\begin{cases} I_Y \ddot{\theta}_Y = T_{pY} + R_Y \\ I_Z \ddot{\theta}_Z = T_{pZ} + R_Z. \end{cases} \tag{5.7}$$

Considérant θ_{ref} nul pour les deux axes, les termes erreurs sont formés par :

$$\begin{cases} \varepsilon_Y = K_Y \left[\theta_Y + T_{v1Y} \dot{\theta}_Y + \dfrac{1}{T_{v2Y}} \displaystyle\int_o^t \theta_Y (t)\, dt\right] \\ \varepsilon_Z = K_Z \left[\theta_Z + T_{v1Z} \dot{\theta}_Z + \dfrac{1}{T_{v2Z}} \displaystyle\int_o^t \theta_Z (t)\, dt\right] \end{cases} \tag{5.8}$$

La loi de commande des vitesses angulaires des armatures donne pour les deux gyroscopes :

$$\begin{cases} \dot{\beta}_{1c} = -2\,\varepsilon_Z - \dot{\theta}_Y \\ \dot{\alpha}_{1c} = \varepsilon_Y - \dot{\theta}_Z \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \dot{\beta}_{2c} = -\varepsilon_Y - \dot{\theta}_X \\ \dot{\alpha}_{2c} = 2\,\varepsilon_X - \dot{\theta}_Y. \end{cases}$$

Mais pour tenir compte du fait que nous ne simulons qu'un gyroscope et pour respecter la symétrie de commande des axes, nous l'avons modifiée en écrivant :

$$\begin{cases} \dot{\beta}_{1c} = -\varepsilon_Z - \dot{\theta}_Y \\ \dot{\alpha}_{1c} = \varepsilon_Y - \dot{\theta}_Z \end{cases} \tag{5.9}$$

Les couples moteurs des armatures réalisent, nous verrons pourquoi plus loin, un asservissement de vitesse. Nous écrirons donc :

$$\begin{cases} T_{m1} = R_1 (p) (\dot{\beta}_{1c} - \dot{\beta}_1) \\ T_{m2} = R_2 (p) (\dot{\alpha}_{1c} - \dot{\alpha}_1). \end{cases} \tag{5.10}$$

Les équations du mouvement des armatures du gyroscope s'écrivent :

$$\begin{cases} I_I \ddot{\beta}_1 = T_{m1} - D_\beta \cdot \dot{\beta}_1 - H_{S1} (\dot{\alpha}_1 + \dot{\theta}_Z) \\ (J_O + J_I) \ddot{\alpha}_1 = T_{m2} - D_\alpha \cdot \dot{\alpha}_1 + H_{S2} (\dot{\beta}_1 + \dot{\theta}_Y) \end{cases} \tag{5.11}$$

si nous ne considérons qu'un frottement visqueux D_α et D_β. Nous verrons plus loin les effets d'un frottement sec que nous avons simulé. Enfin, les couples de réaction sur le satellite s'écrivent simplement :

$$\begin{cases} R_{X1} = (I_I + K_I - J_I) \dot{\alpha}_1 \dot{\beta}_1 \simeq 0 \\ R_{Y1} = - I_I \ddot{\beta}_1 - H_{S1} (\dot{\alpha}_1 + \dot{\theta}_Z) \\ R_{Z1} = - (J_O + J_I) \ddot{\alpha}_1 + H_{S1} (\dot{\beta}_1 + \dot{\theta}_Y) \end{cases} \tag{5.12}$$

5.3 Évaluation des paramètres

Le choix de H_S doit particulièrement retenir notre attention. En effet notre système doit pouvoir échanger son moment cinétique pendant au moins plusieurs orbites autour de la Terre, sans qu'il soit nécessaire de désaturer les gyroscopes. Pour choisir H_S il faut évaluer les couples perturbateurs. Ces couples ont plusieurs origines différentes : ce sont les couples aérodynamiques, magnétiques, le gradient de gravité, la radiation solaire, l'impact des météorites. Ils dépendent beaucoup de la structure du satellite, de son orbite... Une évaluation précise ne peut être faite qu'après une définition précise des paramètres du satellite. Cependant les principaux couples sont périodiques, de période une ou deux fois le temps de révolution du satellite autour de la Terre avec une valeur moyenne non nulle. Selon différentes études faites à l'ESRO sur un satellite astronomique de spectroscopie ultraviolette (LAS), il semble que pour notre satellite, dont l'orbite se situe à une altitude de 500 km environ, les couples perturbateurs doivent avoir pour chaque axe une amplitude de l'ordre de quelques 10^{-4} N-m au plus et une valeur moyenne un peu plus faible.

Si nous considérons que nous devons absorber $1{,}5 \times 10^{-4}$ N-m sur chaque axe pendant trois orbites à l'altitude de 500 km*, soit pendant environ 16 000 secondes, le moment total à absorber est de 7,3 N-m-s pour les trois axes. Comme on suppose les deux gyroscopes parfaitement découplés, on pourra utiliser pratiquement tout leur moment cinétique. On prendra pour chacun $H_S = 4$ N-m-s.

Les valeurs des moments d'inertie des armatures ont été choisies égales à 13×10^{-3} kg-m^2 pour I_I et J_I et à 23×10^{-3} kg-m^2 pour J_O, d'après les calculs du rapport de Hawker Siddeley [29].

I_X, I_Y et I_Z gardent les valeurs que nous leur avons déjà attribuées à plusieurs reprises : 150, 150 et 200 kg-m^2.

5.4 Détermination du type de la loi de commande des moteurs

Il est nécessaire d'introduire une contre-réaction dans la loi de commande des moteurs des armatures des gyroscopes. En effet, un gyroscope à deux degrés de liberté à suspension d'Euler a tendance à osciller à la moindre perturbation si le frottement de ses armatures est négligeable. Ceci peut être montré très simplement à partir des équations (5.11).

* *Ceci pour éviter une désaturation trop fréquente et disposer d'une marge suffisante.*

Si, dans ces équations, on suppose le frottement négligeable, les vitesses angulaires du satellite négligeables et les couples moteurs nuls, on peut écrire :

$$\begin{cases} I_I \ddot{\beta}_1 + H_S \dot{\alpha}_1 = 0 & (5.13.a) \\ (J_O + J_I) \ddot{\alpha}_1 - H_S \dot{\beta}_1 = 0. & (5.13.b) \end{cases}$$

La dérivation de (5.13.*b*) donne alors :

$$\ddot{\beta}_1 = \frac{J_O + J_I}{H_S} \dddot{\alpha}_1,$$

valeur que nous reportons dans (5.13.*a*), ce qui nous permettra d'écrire :

$$I_I (J_O + J_I) \dddot{\alpha}_1 + H_S^2 \dot{\alpha}_1 = 0.$$

Nous obtenons ainsi une équation différentielle du second ordre en $\dot{\alpha}_1$, dont la solution est bien connue :

$$\dot{\alpha}_1 = A \sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{avec} \qquad \omega^2 = \frac{H_S^2}{I_I (J_O + J_I)}.$$

Dérivons $\dot{\alpha}_1$ et reportons $\ddot{\alpha}_1$ dans (5.13.*b*); nous trouvons alors :

$$\dot{\beta}_1 = A \sqrt{\frac{J_O + J_I}{I_I}} \cos(\omega t + \varphi)$$

ce qui montre qu'en l'absence de frottement le gyroscope va osciller sur la fréquence

$$f = \frac{H_S}{2\pi \sqrt{I_I (J_O + J_I)}},$$

c'est-à-dire avec nos valeurs numériques : 29,5 Hz, valeur que nous avons retrouvée lors de la simulation.

Par conséquent, la loi de commande sera un asservissement de vitesse dont le schéma fonctionnel général, tiré de (5.10) et de (5.11), est donné par la Figure 33.

Le problème que nous avons maintenant à résoudre est de déterminer les fonctions de transfert $R_1(p)$ et $R_2(p)$. Connaissant les avantages des correcteurs PID (proportionnel, intégral et dérivé) en rapidité et précision à long terme, on peut penser adopter ce type de correcteur. Mais la simulation sur calculateur analogique a montré que le terme dérivé n'apporte pas un gain très sensible et risque par contre d'entraîner une oscillation du satellite. En outre, il complique les calculs à bord du satellite puisqu'il faut calculer $\ddot{\alpha}_{1c}$ et $\ddot{\beta}_{1c}$. Enfin, considérant les équations (5.10) et (5.11), nous pouvons constater qu'ajouter un terme $\ddot{\alpha}_1$ ou $\ddot{\beta}_1$ dans la commande du couple moteur revient à augmenter les moments d'inertie des armatures; bien entendu, on pourrait diminuer ces mêmes moments d'inertie en affectant $\ddot{\alpha}_1$ et $\ddot{\beta}_1$ du signe négatif, mais les risques d'instabilité qui en résulteraient en cas de variation des paramètres pendant la durée de vie du satellite et la complexité du calcul de $\ddot{\alpha}_{1c}$ et $\ddot{\beta}_{1c}$ nous ont fait rejeter cette solution.

Nous avons choisi pour $R_1(p)$ et $R_2(p)$ la forme $K\left(1 + \frac{1}{\tau p}\right)$. Par ailleurs, nous allons voir

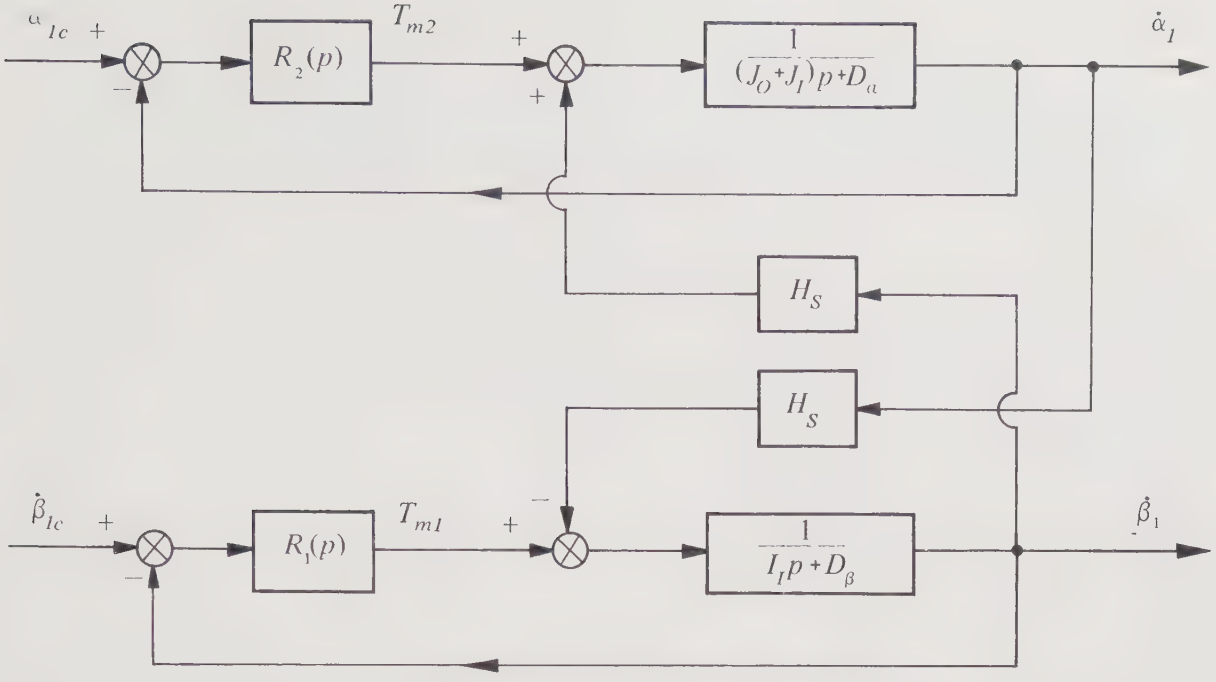


Figure 33.

qu'il est intéressant de ne pas affecter $\dot{\beta}_{1c}$ et $\dot{\beta}_1$ d'une part, et $\dot{\alpha}_{1c}$ et $\dot{\alpha}_1$ d'autre part, du même coefficient. Les équations (5.10) seront donc remplacées par :

$$\begin{cases} T_{m1} = \left(K_2 + \dfrac{K_1}{p}\right)\dot{\beta}_{1c} - \left(K_2' + \dfrac{K_1'}{p}\right)\dot{\beta}_1 \\ T_{m2} = \left(K_2 + \dfrac{K_1}{p}\right)\dot{\alpha}_{1c} - \left(K_2' + \dfrac{K_1'}{p}\right)\dot{\alpha}_1 \end{cases} \tag{5.14}$$

avec cependant :

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{K_1'}{K_2'} = \tau.$$

Pour faciliter notre étude et bien voir les avantages respectifs du terme proportionnel et du terme d'intégration, nous allons considérer deux cas : le correcteur proportionnel et le correcteur proportionnel et intégral.

5.5 Étude du correcteur proportionnel

Avant d'aborder l'étude proprement dite du correcteur, nous allons modifier un peu l'écriture des équations de mouvement pour mettre plus facilement en évidence les couplages introduits par les boucles de contre-réaction des moteurs.

Nous verrons ensuite les réponses de θ_Y et de θ_Z à un couple perturbateur appliqué sur l'axe OZ et les conditions de stabilité des boucles correspondantes.

5.5.1 MODIFICATION DE L'ÉCRITURE DES ÉQUATIONS

Les vitesses angulaires du satellite qui apparaissent dans les équations (5.9), (5.11) et (5.12) n'apportent, les simulations analogiques l'ont montré, que des termes négligeables. Nous allons donc les négliger. D'autre part, nous allons récrire les équations (5.14) sous la forme :

$$\begin{cases} T_{m1} = R_1 \beta_{1c} - R_2 \beta_1 \\ T_{m2} = R_1 \alpha_{1c} - R_2 \alpha_1 \end{cases}$$

en posant $R_1 = K_2 p + K_1$ et $R_2 = K'_2 p + K'_1$.

Et, par ailleurs :

$$\begin{cases} p \beta_{1c} \# - \varepsilon_Z \\ p \alpha_{1c} \# + \varepsilon_Y \end{cases} \qquad \begin{cases} R_Y \# - H_S p \alpha_1 \\ R_Z \# H_S p \beta_1 \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} I_I p^2 \beta_1 = T_{m1} - D_\beta \cdot p \beta_1 - H_S p \alpha_1 \# 0 \\ (J_O + J_I) p^2 \alpha_1 = T_{m2} - D_\alpha \cdot p \alpha_1 + H_S p \beta_1 \# 0. \end{cases}$$

Si nous posons $R'_2 = R_2 + D\beta \cdot p = R_2 + D\alpha \cdot p$, nous pouvons résoudre ces systèmes et obtenir les expressions de R_Z et R_Y en fonction de ε_Y et ε_Z. On trouve ainsi :

$$\begin{cases} R_Y = \dfrac{R_1 H_S^2 p}{H_S^2 p^2 + R_2'^2} \varepsilon_Z - \dfrac{H_S R_1 R'_2}{H_S^2 p^2 + R_2'^2} \varepsilon_Y \\ R_Z = - \dfrac{R_1 H_S^2 p}{H_S^2 p^2 + R_2'^2} \varepsilon_Y - \dfrac{H_S R_1 R'_2}{H_S^2 p^2 + R_2'^2} \varepsilon_Z \end{cases} \tag{5.15}$$

ou, si on pose :

$$K_{YZ} = \frac{R_1 H_S^2 p}{H_S^2 p^2 + R_2'^2} = K_{ZY} \qquad \text{et} \qquad K_{YY} = K_{ZZ} = \frac{H_S R_1 R'_2}{H_S^2 p^2 + R_2'^2}$$

$$\begin{cases} R_Y = K_{YZ} \varepsilon_Z - K_{YY} \varepsilon_Y \\ R_Z = - K_{ZY} \varepsilon_Y - K_{ZZ} \varepsilon_Z. \end{cases} \tag{5.16}$$

Ainsi les équations (5.16) et les équations du satellite nous permettent d'obtenir le schéma fonctionnel donné par la Figure 34. Ce schéma, bien qu'approximatif, permet d'obtenir les principales caractéristiques des réponses de θ_Y et θ_Z à un couple perturbateur et les conditions de stabilité.

Dans le cas du correcteur proportionnel, nous avons : $R_1 = K'_2 p$ et $R'_2 = (K'_2 + D)\, p$. Par conséquent, K_{YY} et K_{YZ} s'écrivent :

$$K_{YY} = \frac{H_S K_2 (K'_2 + D)}{H_S^2 + (K'_2 + D)^2} \qquad \text{et} \qquad K_{YZ} = \frac{K_2 H_S^2}{H_S^2 + (K'_2 + D)^2} \tag{5.17}$$

K_{YY} et K_{YZ} sont donc des constantes vis-à-vis de la fréquence.

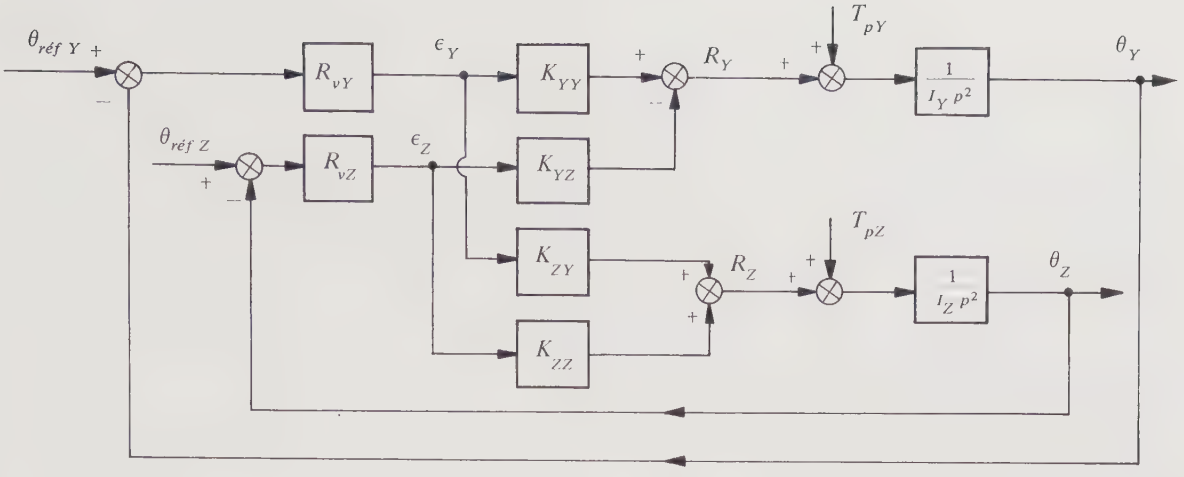


Figure 34.

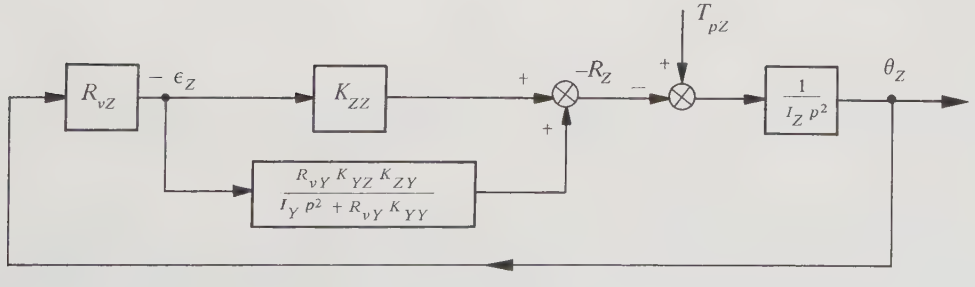
5.5.2 RÉPONSE DE θ_Z A UN COUPLE PERTURBATEUR SUR L'AXE OZ

Si on suppose qu'on applique un couple perturbateur sur l'axe OZ seulement, le schéma de la Figure 34 peut être simplifié et mis sous la forme de la Figure 35. Ce schéma fait apparaître dans l'expression de R_Z un terme supplémentaire dû au couplage des deux axes :

$$R_Z = \left[K_{ZZ} + \frac{R_{vY}\, K_{YZ}\, K_{ZY}}{I_Y\, p^2 + R_{vY}\, K_{YY}}\right] \varepsilon_Z = K_{ZZ} \left[\frac{I_Y\, p^2 + R_{vY}\, H_S \dfrac{K_2}{K_2'}}{I_Y\, p^2 + R_{vY}\, H_S \dfrac{K_2\, K_2'}{H_S^2 + K_2'^2}}\right] \varepsilon_Z.$$

Sous cette forme, on voit que si $K_2'^2 \gg H_s^2$, on aura : $R_Z \simeq K_{ZZ}\varepsilon_Z$. Par conséquent, dans ce cas, la boucle due au couplage est négligeable. La fonction de transfert en boucle fermée de notre système s'écrit donc :

Figure 35.



$$\frac{\theta_Z}{T_{pZ}} = \frac{K'_2\, T_{2Z}}{K_2\, K_Z\, H_S} \cdot \frac{p}{I_Z \dfrac{K'_2\, T_{2Z}}{K_Z\, K_2\, H_S}\, p^3 + T_{1Z}\, T_{2Z}\, p^2 + T_{2Z}\, p + 1} \tag{5.18}$$

Cette expression montre que si T_{pZ} est un échelon, le dépointage θ_Z va tendre vers zéro après quelque temps. On constate d'autre part sur l'équation (5.18) que le gain est proportionnel au rapport K'_2/K_2. Par ailleurs, le dénominateur de cette fonction de transfert fait apparaître le rapport I_Z/K_Z. Étant donné le choix très particulier de K_Y et de K_Z, nous obtiendrons le même dénominateur pour la fonction de transfert θ_Y/T_{pY} et par conséquent la même réponse, à un coefficient près.

Pour optimiser les paramètres K_2 et K'_2, nous allons considérer le dépointage maximum θ_{ZM} obtenu lors de l'application d'un couple perturbateur constant de 10^{-4} N-m; nous étudierons ensuite les conditions de stabilité.

Dépointage maximum

On sait que si $T_{pZ} = G/p$, la réponse est donnée d'après (5.18) en notation de Laplace par :

$$\theta_Z = \frac{K'_2\, T_{2Z}}{K_Z\, K_2\, H_S} \cdot \frac{1}{I_Z \dfrac{K'_2\, T_{2Z}}{K_Z\, K_2\, H_S}\, p^3 + T_{1Z}\, T_{2Z}\, p^2 + T_{2Z}\, p + 1} \cdot G \tag{5.19}$$

Pour calculer $\theta_Z(t)$, il faut donc calculer la transformée inverse de Laplace. Mais comme en général on ne sait pas résoudre littéralement une équation du troisième degré, on ne peut donner une expression mathématique littérale simple et générale. Aussi avons-nous fait varier les paramètres K_2 et K'_2 et avons-nous noté au calculateur analogique la valeur maximum du dépointage θ_{ZM}. Nous avons obtenu ainsi la courbe de la Figure 36 pour différentes valeurs de K_2 : 5, 10, 50 et 100. Les quatre courbes sont exactement superposables et nous en avons déduit la loi :

$$\theta_{ZM\ (arc\,sec)} \# \frac{4}{K_Z} \cdot \left[\frac{K'_2}{K_2}\right]^{1,07} G \tag{5.20}$$

où θ_{ZM} est exprimé en secondes d'arc et G en 10^{-4} N-m.

Si on applique un couple perturbateur de $G \times 10^{-4}$ N-m sur l'axe OY, des mesures du même type ont donné la loi suivante :

$$\underset{(")}{\theta_{YM}} \# \frac{4}{K_Y} \cdot \left(\frac{K'_2}{K_2}\right)^{1,06} G,$$

ce qui montre un bon accord avec la loi (5.20).

Remarques :

- La simulation analogique n'a pas été faite à partir des équations très simplifiées qui nous ont donné l'expression (5.19), mais à partir des équations (5.7) à (5.12). Ceci justifie les simplifications effectuées.
- On constate que θ_{ZM} est presque proportionnel à K'_2/K_2. Physiquement, ceci signifie que plus on amortit le mouvement des armatures, moins vite le gyroscope réagira et plus grands seront les dépointages. Il ne faut donc pas prendre le rapport K'_2/K_2 trop grand. Cependant, le dépointage maximum obtenu même avec $K'_2/K_2 = 3$ nous montre que nous pourrons facilement obtenir les 10 à 15 secondes d'arc nécessaires à la spectroscopie par transformation de Fourier.

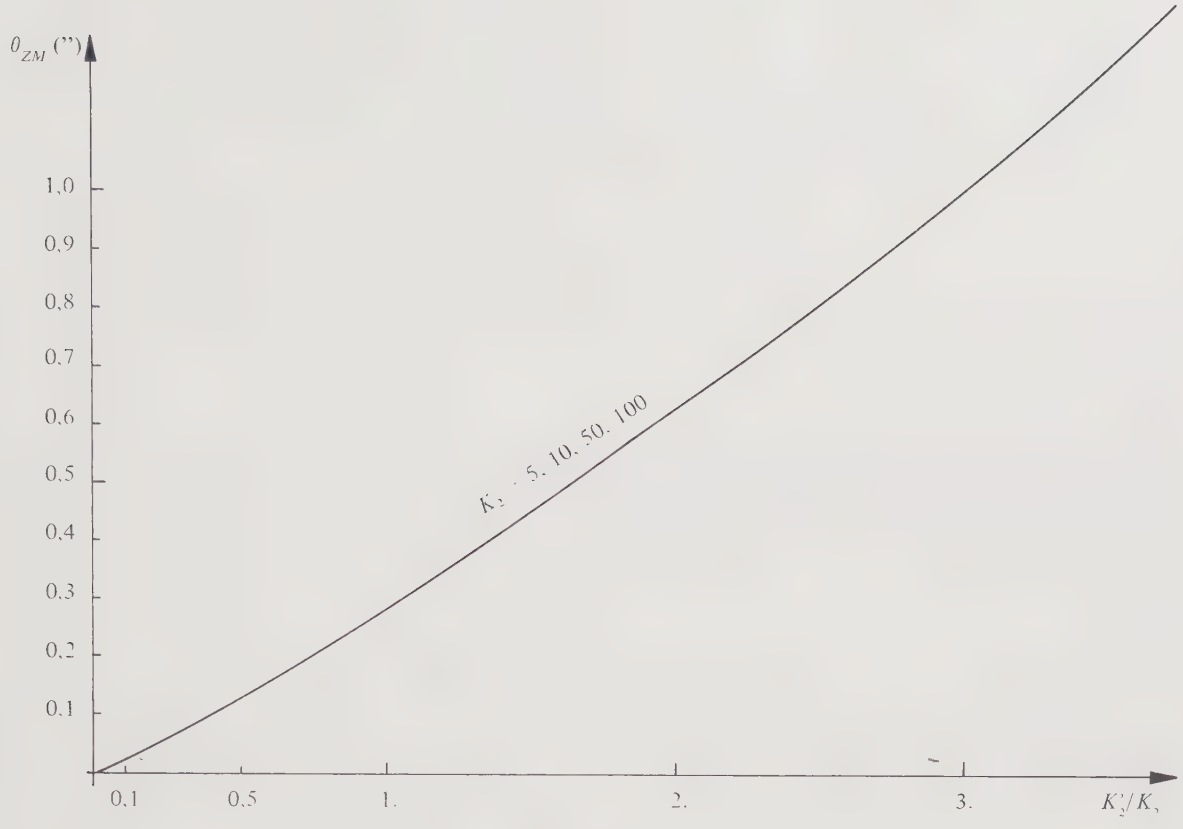
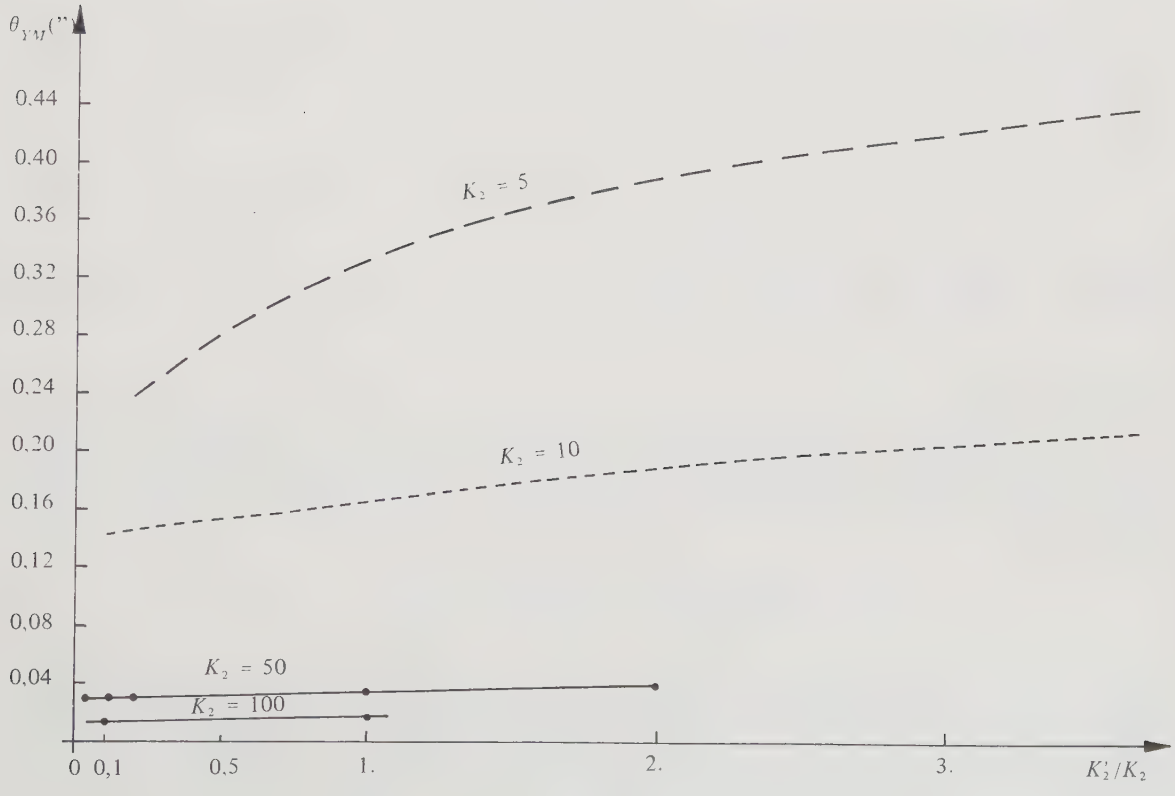


Figure 36.

Figure 37.



– Sur cette expression de θ_{ZM}, nous pouvons voir que l'intégration que nous avons introduite dans la loi de formation de $\bar{\varepsilon}$ nous apporte un petit gain. En effet, en l'absence de ce terme intégral, le satellite prendrait un dépointage constant de $5{,}16\left(\frac{K_2'}{K_2 K_Z}\right) G$, en secondes d'arc, G étant en 10^{-4} N-m.

Le terme intégral est donc avantageux tant que :

$$\frac{4}{K_Z}\left(\frac{K_2'}{K_2}\right)^{1{,}07} G < 5{,}16\left(\frac{K_2'}{K_2 K_Z}\right) G$$

c'est-à-dire : $K_2'/K_2 < 38$, ce qui sera toujours notre cas.

Stabilité de la boucle

On obtient assez facilement les conditions de stabilité en appliquant le critère de Routh au dénominateur de la fonction de transfert θ_Z/T_{pZ}.

On peut montrer ainsi que, si on appelle $a = \frac{T_{v1}\, T_{v2}\, K_Z\, H_S}{I_Z}$, la stabilité sera obtenue si on a la condition :

$$\frac{H_S}{a\, K_2^2} < \frac{K_2'}{K_2} < a\, H_S\left(1 - \frac{1}{a^2\, K_2^2}\right)$$

c'est-à-dire avec nos valeurs numériques :

$$K_2 K_2' > 0{,}31 \qquad \text{et} \qquad K_2'/K_2 < 52.$$

5.5.3 RÉPONSE DE θ_Y A UN COUPLE PERTURBATEUR SUR L'AXE OZ

Le schéma fonctionnel que nous devons maintenant considérer est celui de la Figure 38. Nous l'avons établi à partir de la Figure 34. Ce schéma nous permet de mettre clairement en évidence le couplage de l'axe OZ sur l'axe OY, couplage dû à la boucle de retour des asservissements de vitesse.

On en déduit :

$$\frac{\theta_Y}{T_{pZ}} = \frac{R_{vZ}\, K_{YZ}}{(I_Y\, p^2 + R_{vY}\, K_{YY})(I_Z\, p^2 + K_{ZZ}\, R_{vZ}) + R_{vY}\, R_{vZ}\, K_{YZ}\, K_{ZY}} \tag{5.21}$$

Là aussi, il n'est pas possible d'obtenir mathématiquement $\theta_Y(t)$ quand $T_{pZ} = G/p$. Aussi avons-nous obtenu les résultats sur le calculateur analogique.

Dépointage maximum obtenu

Les courbes $\theta_{YM} = f\left(\frac{K_2'}{K_2}\right)$, obtenues dans les mêmes conditions que pour θ_{ZM}, sont données dans la Figure 37. Nous pouvons les exprimer par la loi approchée suivante :

$$\left|\begin{array}{l} - \text{ si } K_2' \leqslant \sqrt{\frac{K_2}{5}} \;\; : \;\; \theta_{YM\ (arc\ sec)} \# \frac{1{,}3}{K_2} \cdot G \\ \\ - \text{ si } K_2' > \sqrt{\frac{K_2}{5}} \;\; : \;\; \theta_{YM\ (arc\ sec)} \# \frac{1{,}3}{K_2} K_2'^{\frac{0{,}5}{\sqrt{K_2}}} G \end{array}\right. \tag{5.22}$$

où θ_{YM} est en secondes d'arc et G en 10^{-4} N-m.

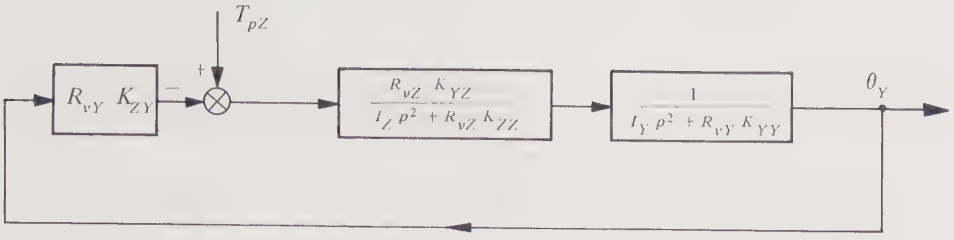


Figure 38.

Ces courbes font apparaître l'effet de K_2 sur le couplage des deux axes. Pour avoir un couplage faible, il faut prendre K_2 assez grand, ce qui est, somme toute, logique quand on considère le schéma fonctionnel global du contrôle d'attitude par GCMC.

Conditions de stabilité

Le polynôme caractéristique $D(p)$ étant assez compliqué, les conditions de stabilité sont assez difficiles à obtenir. En effet :

$$D(p) = I_Y I_Z p^6 + 2 K K_Y I_Z T_1 p^5 + K_Y [2 K I_Z + K_Z (K'^2 + K^2) T_1^2] p^4$$
$$+ K_Y \left[2 \frac{K I_Z}{T_2} + 2 T_1 K_Z (K^2 + K'^2) \right] p^3 + K_Y K_Z (K^2 + K'^2)$$
$$\times \left[\left(1 + 2 \frac{T_1}{T_2} \right) p^2 + \frac{2}{T_2} p + \frac{1}{T_2^2} \right]$$

avec

$$K = K_{YY} = K_{ZZ} = \frac{H_S K_2 K_2'}{H_S^2 + K_2'^2}$$

$$K' = K_{YZ} = K_{ZY} = \frac{H_S^2 K_2}{H_S^2 + K_2'^2}$$

$$T_1 = T_{v1Y} = T_{v1Z} \qquad \text{et} \qquad T_2 = T_{v2Y} = T_{v2Z}.$$

Nous avons cependant appliqué le critère de Routh à $D(p)$ et nous avons ainsi obtenu des conditions de stabilité en plein accord avec les résultats de la simulation analogique (Figure 39). En effet, la Figure 39 montre la variation de ε_{Tm} en fonction de K_2'/K_2 pour plusieurs valeurs de K_2 : ε_{Tm} a été défini par :

$$\varepsilon_{Tm} = K_T \int_0^T (T_{m1}^2 + T_{m2}^2)\, dt,$$

K_T étant une constante de proportionnalité et T pris égal à 50 secondes. Ainsi nous avons intégré l'énergie fournie par les moteurs pendant 50 secondes. Plus on va se rapprocher des conditions d'oscillations, plus cette énergie sera grande. L'optimum sera au niveau minimum d'énergie. Cette méthode fournit donc un moyen de vérifier les conditions de stabilité que nous allons obtenir par le calcul.

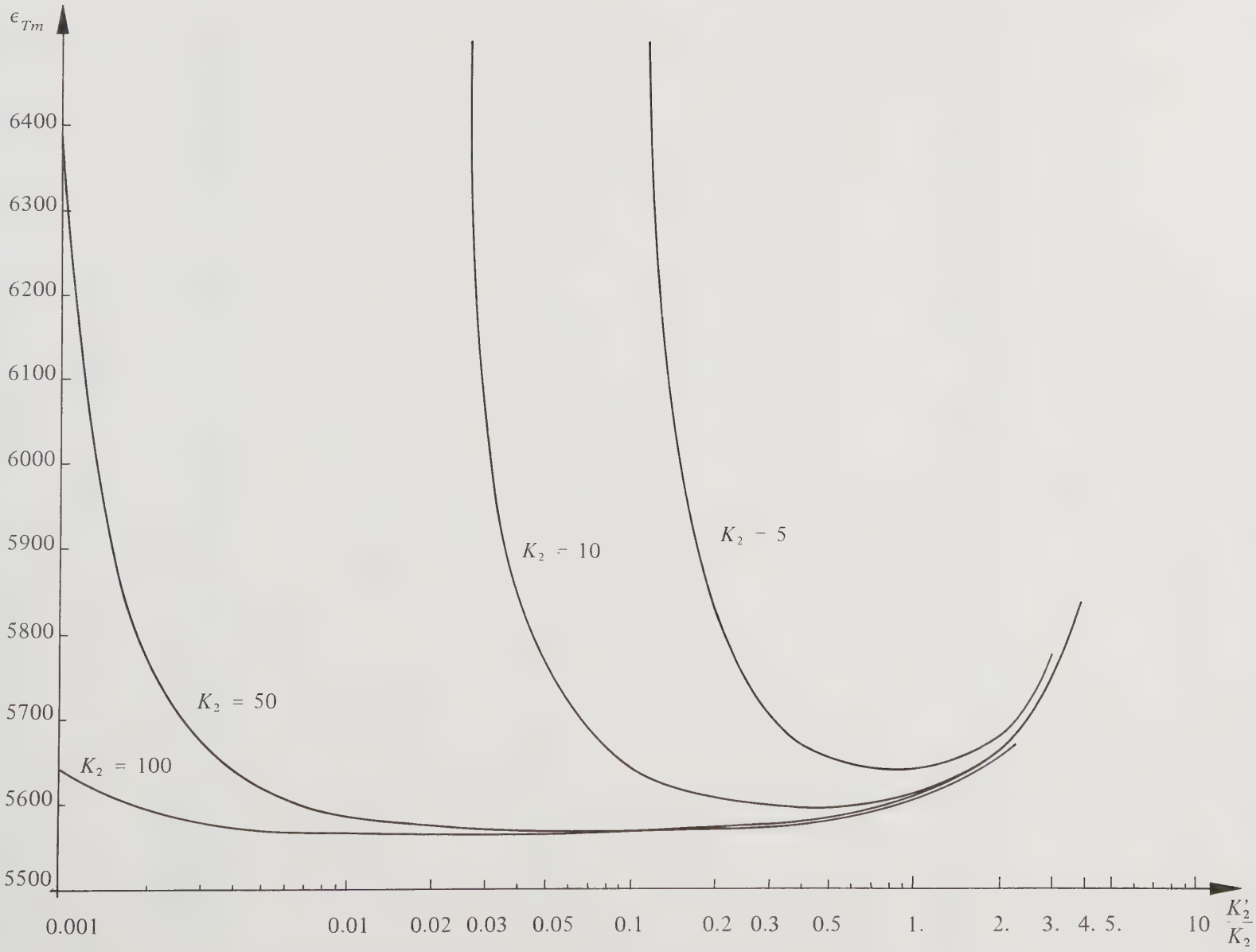

ϵ_{Tm}
6400
6300
6200
6100
6000
5900
5800
5700
5600
5500
$K_2 = 50$
$K_2 = 100$
$K_2 = 10$
$K_2 = 5$
0.001
0.01
0.02
0.03
0.05
0.1
0.2
0.3
0.5
1.
2.
3.
4.
5.
10
$\frac{K_2'}{K_2}$

Figure 39.

Comme les calculs sont très longs, nous ne donnerons que les résultats. Nous les avons obtenus dans deux cas : un cas simple qui autorise beaucoup de simplifications : $K_Y I_Z = K_Z I_Y$, et le cas général : $K_Y I_Z \neq K_Z I_Y$.

a) *Cas* $K_Y I_Z = K_Z I_Y$

Le système sera stable si les conditions suivantes sont simultanément remplies :

$$\begin{cases} \dfrac{K'_2}{K_2} < \dfrac{2 H_S K_Z T_1^2}{I_Z \left[\dfrac{H_S^2}{K_2'^2} - 1 + \sqrt{3 + \left(\dfrac{H_S}{K'_2} \right)^4} \right]} & (5.24) \\ K'_2 > \dfrac{H_S I_Z}{K_Z T_1^2 K_2} & (5.25) \end{cases}$$

Numériquement :

$$\begin{cases} \dfrac{K'_2}{K_2} < \dfrac{13}{\dfrac{16}{K_2'^2} - 1 + \sqrt{3 + \left(\dfrac{4}{K'_2} \right)^4}} \\ K'_2 > \dfrac{2{,}4}{K_2} \end{cases}$$

Ces formules littérales ont été établies en supposant en outre que $T_2 = 2 T_1$, ce qui a permis un certain nombre de simplifications supplémentaires.

b) *Cas* $K_Y I_Z \neq K_Z I_Y$

Il est nécessaire d'envisager ce cas, car il correspond à une variation du gain dans la loi de formation du vecteur erreur $\bar{\varepsilon}$. Il faut s'assurer que l'on ne sort pas des conditions de stabilité. Les conditions sont plus longues à calculer. Pour simplifier l'écriture, nous avons posé :

$$q' = \frac{(K_Y I_Z + K_Z I_Y)^2}{4 K_Y K_Z I_Y I_Z}$$

$$q = \frac{K_Y I_Z + K_Z I_Y}{2 K_Y I_Z}$$

Nous devons avoir simultanément alors :

$$\begin{cases} \dfrac{K_2}{K'_2} > \dfrac{K_Y I_Z + K_Z I_Y}{2 H_S K_Y K_Z T_1^2} \left[-1 + \dfrac{1}{2 q'} \left(1 + \dfrac{H_S^2}{K_2'^2} \right) \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{1}{H_S T_1^2} \sqrt{\dfrac{I_Y I_Z}{K_Y K_Z}} \sqrt{q' + \dfrac{1}{4 q'} - 1 + \dfrac{T_1}{T_2} + \dfrac{H_S^2}{K_2'^2} \left(\dfrac{T_1}{T_2} - 1 + \dfrac{1}{2 q'} \right) + \dfrac{H_S^4}{4 q' K_2'^4}} \right] & (5.26) \\ \dfrac{K_2'^2}{H_S^2} > \dfrac{\left[\beta_1 - \delta_1 \left(\dfrac{K'_2}{H_S K_2} \right) + \mu_1 \left(\dfrac{K'_2}{H_S K_2} \right)^2 \right] \left(\dfrac{K'_2}{H_S K_2} \right)}{1 + \alpha_1 \left(\dfrac{K'_2}{H_S K_2} \right) + \gamma_1 \left(\dfrac{K'_2}{H_S K_2} \right)^2 - \mu_1 \left(\dfrac{K'_2}{H_S K_2} \right)^3} & (5.27) \end{cases}$$

avec :

$$\alpha_1 = \frac{I_Z}{q\,K_Z\,T_1^2}\left[(q-1)^2 - q^2\,\frac{T_1}{T_2}\right]$$

$$\beta_1 = \frac{(2\,q-1)}{q}\cdot\frac{I_Z}{K_Z\,T_1^2}$$

$$\gamma_1 = \frac{(2\,q^2+2\,q-1)\,I_Z^2}{K_Z^2\,T_1^3\,T_2}$$

$$\delta_1 = (2\,q-1)\,\frac{I_Z^2}{K_Z^2\,T_1^3\,T_2}$$

$$\mu_1 = q\,(2\,q-1)\,\frac{I_Z^3}{K_Z^3\,T_1^4\,T_2^2}$$

La complexité de cette dernière relation nous a conduits à rechercher une condition suffisante plus large :

$$K_2' > \frac{2\,H_S\,I_Y\,I_Z}{(K_Y\,I_Z + K_Z\,I_Y)\,T_1^2\,K_2}. \tag{5.28}$$

Cette condition est valable tant que q n'est pas trop grand.

Les courbes $\varepsilon_{Tm} = f\left(\frac{K_2'}{K_2}\right)$ tracées à partir des mesures faites sur calculateur analogique sont, on peut le vérifier, en bon accord avec les résultats obtenus dans le cas $K_Y I_Z = K_Z I_Y$.

5.6 Correcteur proportionnel et intégral

Si on applique encore un couple perturbateur sur l'axe OZ, Les Figures 35 et 38 donnant les schémas fonctionnels pour θ_Z et θ_Y sont encore valables, mais les expressions de K_{YY}, K_{ZZ}, K_{YZ}, et K_{ZY} changent :

$$\begin{cases} K_{YY} = K_{ZZ} = \dfrac{H_S\,(K_2\,p + K_1)\,(K_2'\,p + K_1')}{H_S^2\,p^2 + (K_2'\,p + K_1')^2} \\[2ex] K_{YZ} = K_{ZY} = \dfrac{H_S^2\,(K_2\,p + K_1)\,p}{H_S^2\,p^2 + (K_2'\,p + K_1')^2} \end{cases} \tag{5.29}$$

5.6.1 RÉPONSE DE θ_Z A UN COUPLE PERTURBATEUR SUR L'AXE OZ

La réponse de θ_Z à un couple perturbateur sur l'axe OZ est pratiquement identique à la réponse obtenue dans le cas où il n'y a pas d'intégration.

En effet, K_1, K_1', K_2 et K_2' sont reliés par définition par : $\frac{K_1}{K_1'} = \frac{K_2}{K_2'}$; donc :

$$\frac{K_1}{K_1'} = \frac{K_2}{K_2'} = \frac{K_2\,p + K_1}{K_2'\,p + K_1'}.$$

Si on suppose que $(K'_2\,p + K'_1)^2 \gg H_S^2\,p^2$,

$$K_{YY} = K_{ZZ} \# H_S \cdot \frac{K_2\,p + K_1}{K'_2\,p + K'_1} = H_S \cdot \frac{K_2}{K'_2}$$

et :

$$K_{YZ} = K_{ZY} \# \frac{H_S^2\,K_2\,p}{K'_2\,(K'_2\,p + K'_1)} = \frac{H_S^2\,K_2}{K'_2} \cdot \frac{p}{p + \dfrac{K'_1}{K'_2}} \tag{5.30}$$

Donc K_{YY} est pratiquement le même que dans le cas du correcteur proportionnel ; par contre l'intégration diminue la valeur de $|K_{YZ}|$ sauf pour la fréquence infinie. Donc les termes de couplage que nous avions déjà négligés pour l'étude du correcteur proportionnel sont d'autant plus négligeables maintenant. La réponse doit être identique à celle du paragraphe 5.5.2.

Lors de la simulation analogique nous n'avons trouvé aucune différence sensible dans la réponse de θ_Z avec ou sans terme intégral, ce qui confirme la validité des approximations que nous avons faites.

5.6.2 RÉPONSE DE θ_Y A UN COUPLE PERTURBATEUR SUR L'AXE OZ

Introduire une intégration dans la loi de commande des moteurs des armatures permet de réduire le couplage des axes. En effet, avec les mêmes approximations que plus haut, l'équation (5.21) devient :

$$\frac{\theta_Y}{T_{pZ}} = \frac{R_{vZ}\,K_{YZ}}{(I_Y\,p^2 + R_{vY}\,K_{YY})\,(I_Z\,p^2 + R_{vZ}\,K_{ZZ})}$$

Or nous avons vu que $(K_{ZZ})_I = (K_{YY})_I = (K_{ZZ})_P$, I et P en indice signifiant que nous prenons la fonction de transfert avec le terme intégral ou avec le terme proportionnel seul.
Par ailleurs :

$$(K_{YZ})_I = (K_{YZ})_P \frac{p}{p + \dfrac{K'_1}{K'_2}}.$$

Par conséquent, si on applique un échelon sur OZ, la réponse $(\theta_Y)_I$ avec un terme intégral se déduira de la réponse $(\theta_Y)_P$ sans intégration, suivant la loi approchée :

$$(\theta_Y)_I \# (\theta_Y)_P \frac{p}{p + \dfrac{K'_1}{K'_2}} \tag{5.31}$$

Ceci montre que l'on aura $(\theta_Y)_I < (\theta_Y)_P$, ce qui est confirmé au calculateur analogique (Figure 40).

L'expression de $(\theta_Y)_I$ est encore plus difficile à obtenir que celle de $(\theta_Y)_P$. Nous nous contenterons de donner une expression approchée du dépointage maximum obtenu, à partir de la simulation (Figure 40) :

$$\theta_{YM} \# \theta_{YO} \times \frac{1 + 8{,}75\,\dfrac{K'_1}{K'_2}}{1 + 13{,}1\,\dfrac{K'_1}{K'_2} + 31{,}2\left(\dfrac{K'_1}{K'_2}\right)^2} \tag{5.32}$$

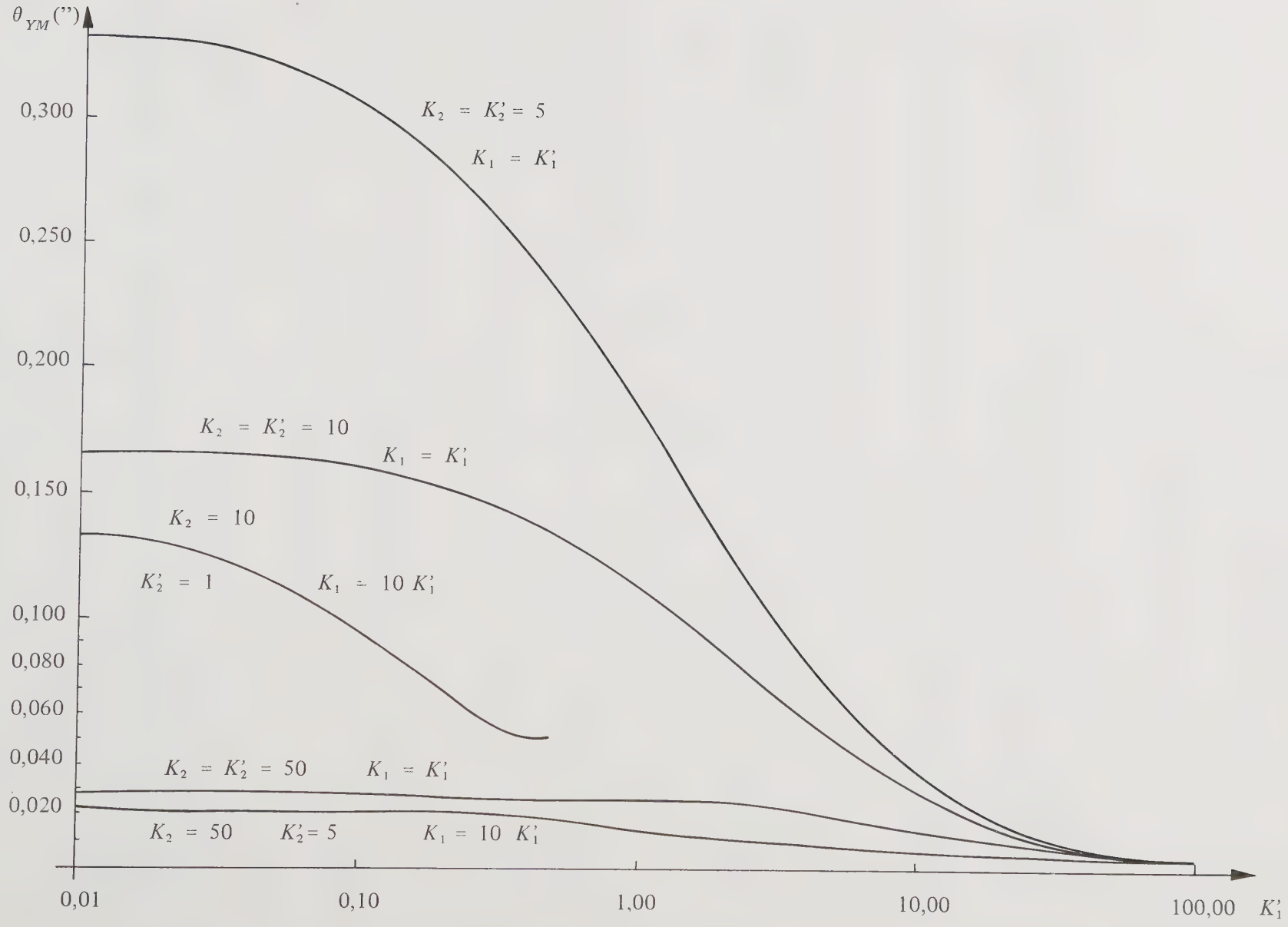

θ_{YM}(")
0,300
0,250
0,200
0,150
0,100
0,080
0,060
0,040
0,020
$K_2 = K_2' = 5$
$K_1 = K_1'$
$K_2 = K_2' = 10$
$K_1 = K_1'$
$K_2 = 10$
$K_2' = 1$
$K_1 = 10\ K_1'$
$K_2 = K_2' = 50$
$K_1 = K_1'$
$K_2 = 50$
$K_2' = 5$
$K_1 = 10\ K_1'$
0,01
0,10
1,00
10,00
100,00
K_1'

Figure 40.

avec :

$$\theta_{YO\ (\text{arc sec})} \# \frac{1{,}3}{K_2} \quad \text{si} \quad K_2' \leqslant \sqrt{\frac{K_2}{5}}$$

ou :

$$\theta_{YO\ (\text{arc sec})} \# \frac{1{,}3}{K_2} K_2'^{\left(\frac{0{,}5}{\sqrt{K_2}}\right)} \quad \text{si} \quad K_2' > \sqrt{\frac{K_2}{5}}$$

L'étude des conditions de stabilité est encore plus difficile que dans le cas du correcteur proportionnel. Nous avons cependant déterminé une condition par la méthode de Routh :

si on pose :

$$y = \frac{K_1'}{K_2}, \quad x = \frac{K_2'}{K_2} \quad \text{et} \quad K_Y' = \frac{K_Y}{I_Y},$$

on trouve ainsi dans le cas $K_Y I_Z = K_Z I_Y$:

$$\frac{H_S^2}{K_2'^2} < \frac{y^3 + 4 H_S K_Y' T_1 y^2 + 4 H_S^2 K_Y'^2 T_1^2 y + H_S^3 K_Y'^2 K_Z' T_1^3 - \dfrac{H_S K_Y'}{T_2} x^2 + H_S^2 K_Y'^2 T_1 x}{\dfrac{H_S K_Y'}{T_2} x^2 + H_S K_Y' (H_S K_Y' T_1 + 2 y) x + H_S K_Y' T_1 y^2 + H_S^2 K_Y'^2 T_1^2 y} \quad (5.33)$$

c'est-à-dire avec les valeurs numériques utilisées :

$$\frac{H_S^2}{K_2'^2} < \frac{y^3 + 5{,}32\, y^2 + 7{,}11\, y + 2{,}31 - 0{,}0266\, x^2 + 0{,}356\, x}{0{,}0266\, x^2 + (0{,}356 + 0{,}533\, y)\, x + 1{,}33\, y^2 + 2{,}31\, y} \quad (5.34)$$

Si $K_Y I_Z \neq K_Z I_Y$, l'expression est plus compliquée :

$$\frac{H_S^2}{K_2'^2} <$$

$$\frac{y\left[y + H_S T_1 \cdot \dfrac{K_Y I_Z + K_Z I_Y}{I_Y I_Z}\right]^2 + H_S^3 T_1^3 K_Y K_Z \cdot \dfrac{K_Y I_Z + K_Z I_Y}{2 I_Y^2 I_Z^2} + H_S^2 T_1 \cdot \dfrac{K_Y^2 I_Z^2 + K_Z^2 I_Y^2}{2 I_Y^2 I_Z^2} x - \dfrac{H_S}{T_2} \cdot \dfrac{K_Y I_Z + K_Z I_Y}{2 I_Y I_Z} \cdot x^2}{H_S \cdot \dfrac{K_Y I_Z + K_Z I_Y}{2 I_Y I_Z}\left(y^2 T_1 + 2 x y + \dfrac{x^2}{T_2}\right) + H_S^2 T_1 \dfrac{K_Y K_Z}{I_Y I_Z}(y T_1 + x)}$$

On peut vérifier ainsi que la condition (5.34) est en accord avec le réseau de courbes $\varepsilon_{Tm} = f(K_1', K_2, K_2')$ obtenues par simulation (Figure 41).

5.7 Performances

Dans ce paragraphe, nous commenterons quelques courbes représentant les réponses à un couple perturbateur de 10^{-4} N-m sur l'axe OZ. Puis nous étudierons les conséquences du bruit des senseurs et les effets de frottements secs dans les armatures des gyroscopes. Nous donnerons aussi quelques résultats sur les manœuvres de réorientation du satellite.

5.7.1 RÉPONSES A UN COUPLE PERTURBATEUR ÉCHELON DE 10^{-4} N-m SUR L'AXE OZ

Les réponses essentielles sont données dans les Figures 42 et 43 qui montrent les courbes décrivant les variations de $\dot{\theta}_Z$, θ_Z, $\dot{\theta}_Y$, θ_Y, $\dot{\beta}_1$, $\dot{\alpha}_1$, T_{m2} et T_{m1} en fonction du temps. Les valeurs des paramètres que nous avons choisies sont :

$$K_2 = K_2' = 10 \quad \text{et} \quad K_1 = K_1' = 1.$$

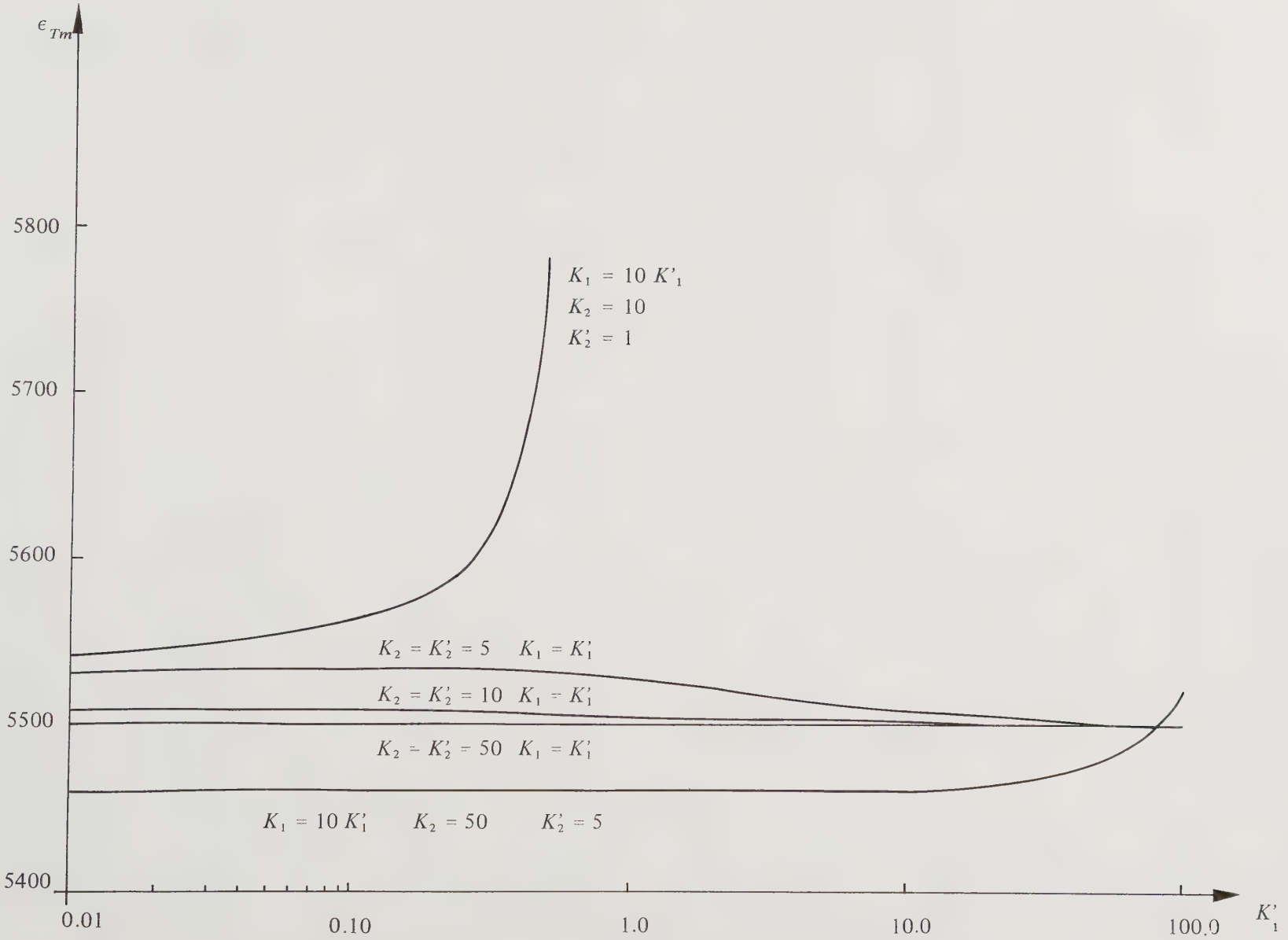

ϵ_{Tm}
5800
5700
5600
5500
5400
$K_1 = 10\ K'_1$
$K_2 = 10$
$K'_2 = 1$
$K_2 = K'_2 = 5$ $K_1 = K'_1$
$K_2 = K'_2 = 10$ $K_1 = K'_1$
$K_2 = K'_2 = 50$ $K_1 = K'_1$
$K_1 = 10\ K'_1$ $K_2 = 50$ $K'_2 = 5$
0.01
0.10
1.0
10.0
100.0
K'_1

Figure 41.

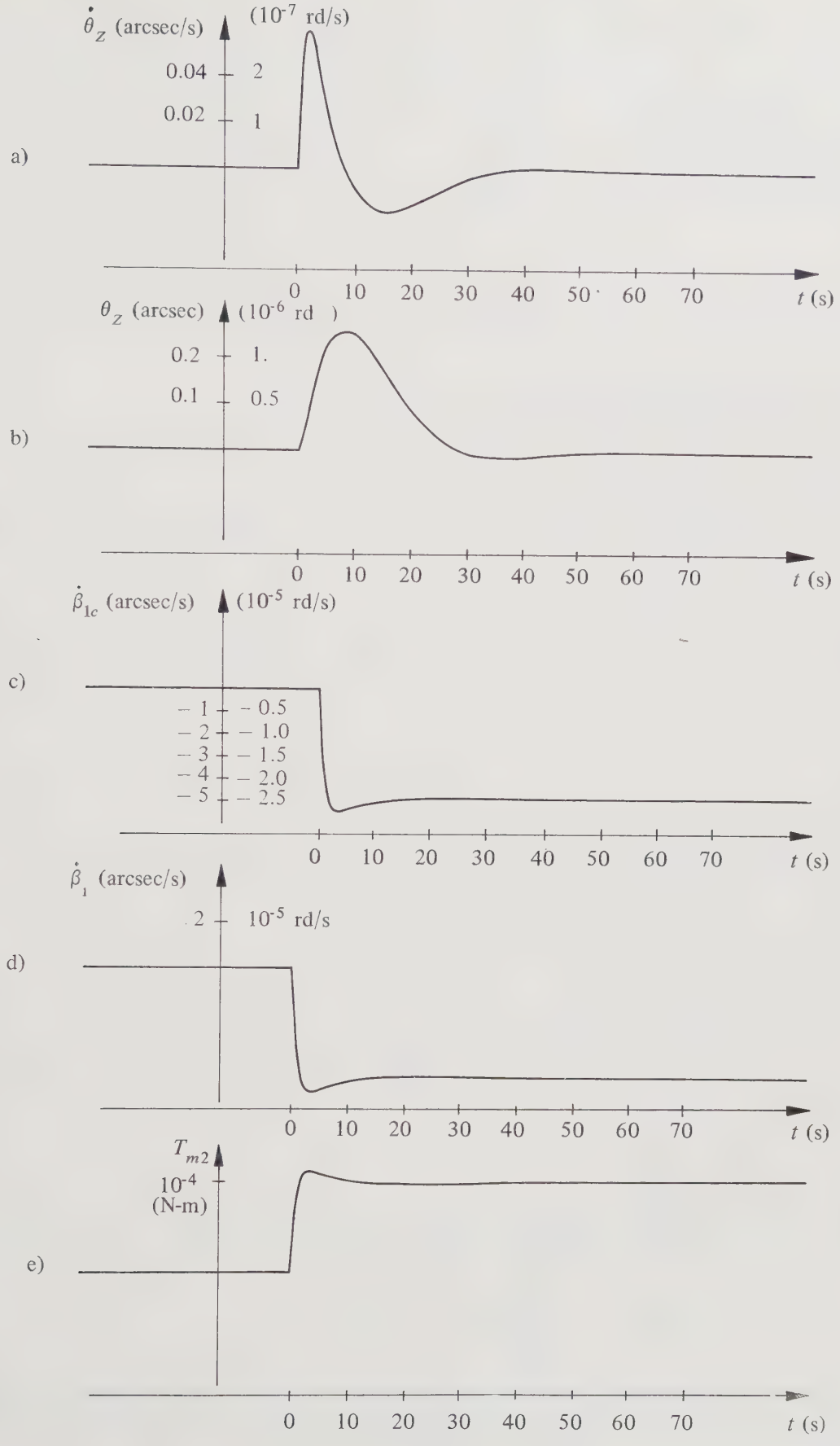

a)
$\dot{\theta}_Z$ (arcsec/s)
$(10^{-7}$ rd/s)
0.04
2
0.02
1
0 10 20 30 40 50 60 70
t (s)
b)
θ_Z (arcsec)
$(10^{-6}$ rd)
0.2
1.
0.1
0.5
0 10 20 30 40 50 60 70
t (s)
c)
$\dot{\beta}_{1c}$ (arcsec/s)
$(10^{-5}$ rd/s)
– 1 – 0.5
– 2 – 1.0
– 3 – 1.5
– 4 – 2.0
– 5 – 2.5
0 10 20 30 40 50 60 70
t (s)
d)
$\dot{\beta}_1$ (arcsec/s)
.2
10^{-5} rd/s
0 10 20 30 40 50 60 70
t (s)
e)
T_{m2}
10^{-4}
(N-m)
0 10 20 30 40 50 60 70
t (s)

Figure 42.

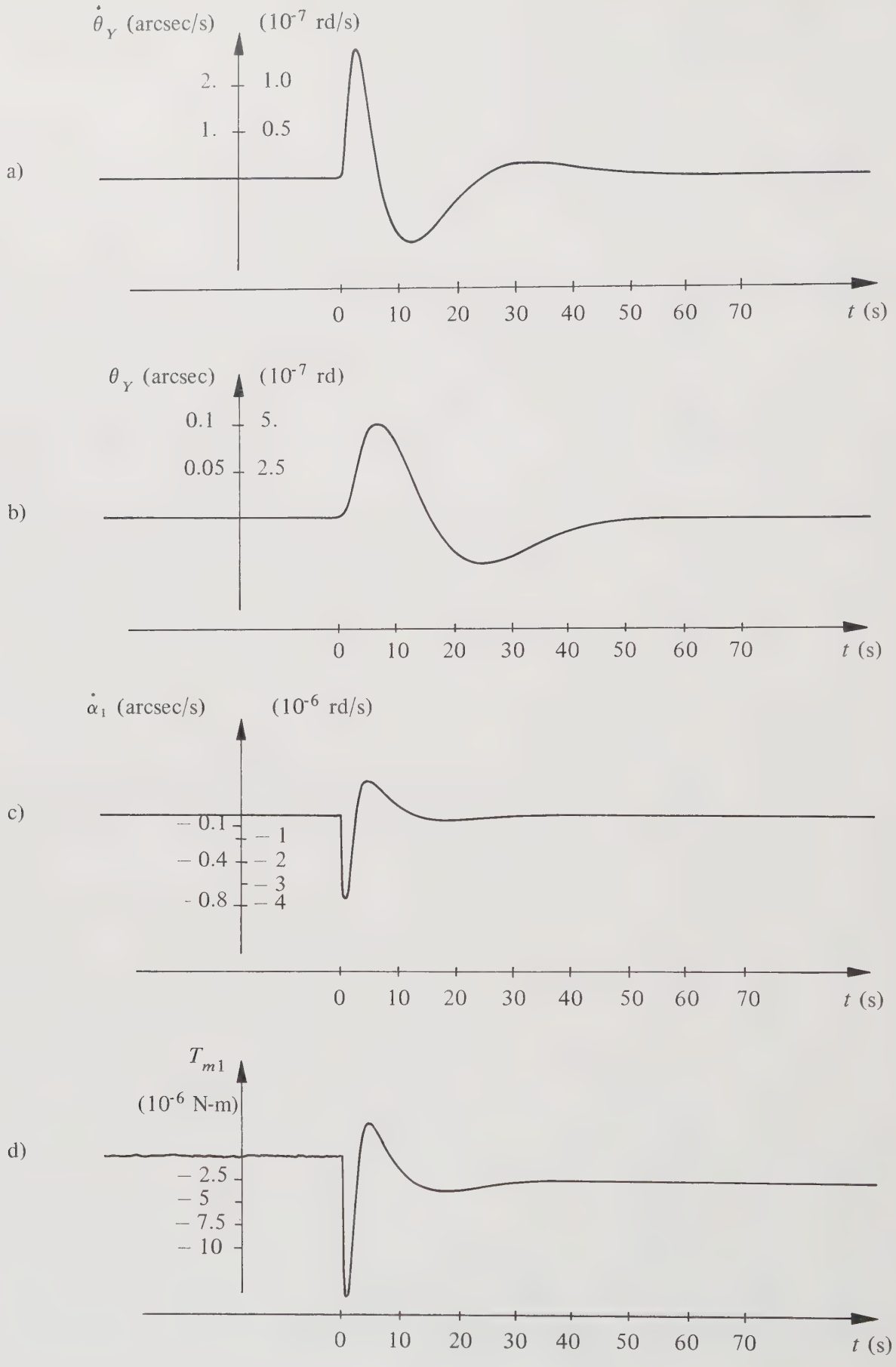

a)
$\dot{\theta}_Y$ (arcsec/s)
(10^{-7} rd/s)
2.
1.
1.0
0.5
0
10
20
30
40
50
60
70
t (s)
b)
θ_Y (arcsec)
(10^{-7} rd)
0.1
0.05
5.
2.5
0
10
20
30
40
50
60
70
t (s)
c)
$\dot{\alpha}_1$ (arcsec/s)
(10^{-6} rd/s)
– 0.1
– 0.4
- 0.8
– 1
– 2
– 3
– 4
0
10
20
30
40
50
60
70
t (s)
d)
T_{m1}
(10^{-6} N-m)
– 2.5
– 5
– 7.5
– 10
0
10
20
30
40
50
60
70
t (s)

Figure 43.

L'examen des courbes de la Figure 42 permet de voir la rapidité de réponse des gyroscopes de commande de moment cinétique. Plus précisément les courbes 42*c*) et 42*d*), qui représentent la vitesse angulaire de commande de l'armature intérieure $\dot{\beta}_{1c}$ et la vitesse angulaire réelle $\dot{\beta}_1$, sont presque superposables : la pente à l'origine de $\beta_{1c}(t)$ est de 6,2 arc sec./sec.^{2}, alors qu'elle est de 5,1 arc sec./sec.^{2} pour $\dot{\beta}_1(t)$; $\dot{\beta}_{1c}(t)$ passe ensuite à la valeur de $-$ 4,9 arc sec./sec. en 1,6 secondes et $\dot{\beta}_1(t)$ en 1,7 secondes; les extrémums de $\dot{\beta}_{1c}(t)$ et de $\dot{\beta}_1(t)$ sont atteints en 2,9 secondes et 3,5 secondes respectivement. Par ailleurs, le couple moteur T_{m2} (courbe 42*e*) atteint en 1,8 secondes seulement la valeur du couple perturbateur, qu'il dépasse de 6 % environ. Ainsi, dès l'instant $t = 1{,}8$ secondes, la vitesse angulaire θ_Z du satellite autour de l'axe OZ commence à décroître (courbe 42*a*).

L'angle de dépointage θ_Z, représenté par la courbe 42*b*, atteint son maximum (0,27 seconde d'arc) en 8,5 secondes. Le terme intégral de ε_Z l'annule ensuite, après un rebondissement de 5,2 % environ.

La Figure 43 montre les effets du couplage des axes dû à l'asservissement de vitesse des armatures. L'angle de dépointage θ_Y (Figure 43*b*) atteint son maximum (0,1 seconde d'arc) après 6 secondes, passe par zéro, et, après un rebondissement assez important, s'annule de nouveau et définitivement après une cinquantaine de secondes. On peut remarquer dans la courbe 43*d*, représentant le couple moteur T_{m1}, que T_{m1} prend une valeur constante après une trentaine de secondes bien qu'il n'y ait pas de couple perturbateur appliqué sur cet axe : ce couple constant de $-\ 2{,}5 \times 10^{-6}$ N-m compense le couple de frottement visqueux $D_B \cdot \dot{\beta}_1$ qui apparaît sur l'axe de rotation de l'armature intérieure.

Les courbes de la Figure 44 illustrent l'influence d'un terme intégral dans les asservissements de vitesse des armatures. Relevées pour des valeurs constantes de K_2 et de K_2' et pour trois valeurs différentes de K_1 et de K_1', elles montrent une réduction très sensible des valeurs de θ_Y aux temps correspondants, quand le gain du terme intégral augmente.

5.7.2 EFFET DU BRUIT DES SENSEURS

On sait que la valeur moyenne du carré du signal de sortie d'un système linéaire de transmittance $H(p)$ est donné par la formule :

$$< s^2(t) > = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(j\omega)|^2 \, \Phi_e(\omega) \, d\omega,$$

où $\Phi_e(\omega)$ est le spectre de fréquences du signal d'entrée.

Par conséquent, si $\Phi_b(\omega)$ est le spectre de fréquence du bruit du senseur exprimé en rad^2/rad/sec., la valeur moyenne du carré de l'angle de dépointage θ est donnée par :

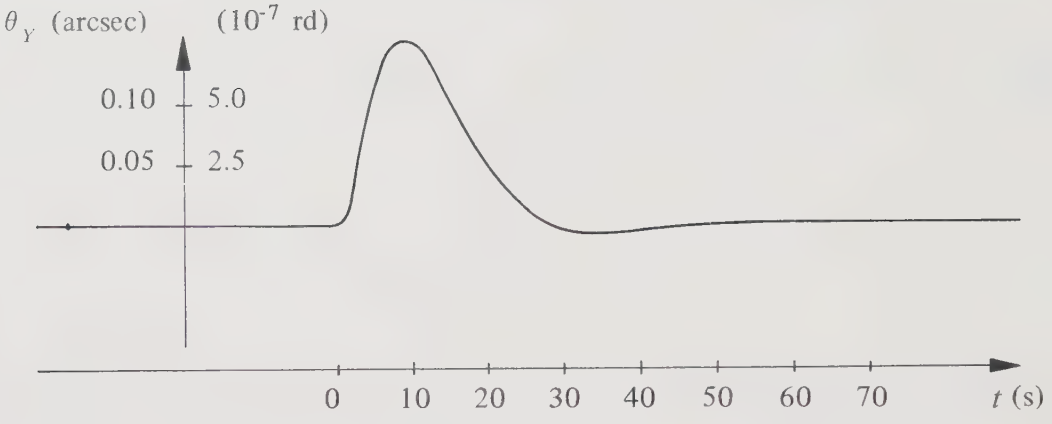
$$< \theta^2 > = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(j\omega)|^2 \, \Phi_b(\omega) \, d\omega$$

$H(p)$ étant la fonction de transfert du système relative au bruit. Si nous supposons pour le calcul que le bruit du senseur est un bruit blanc d'intensité B, nous aurons alors :

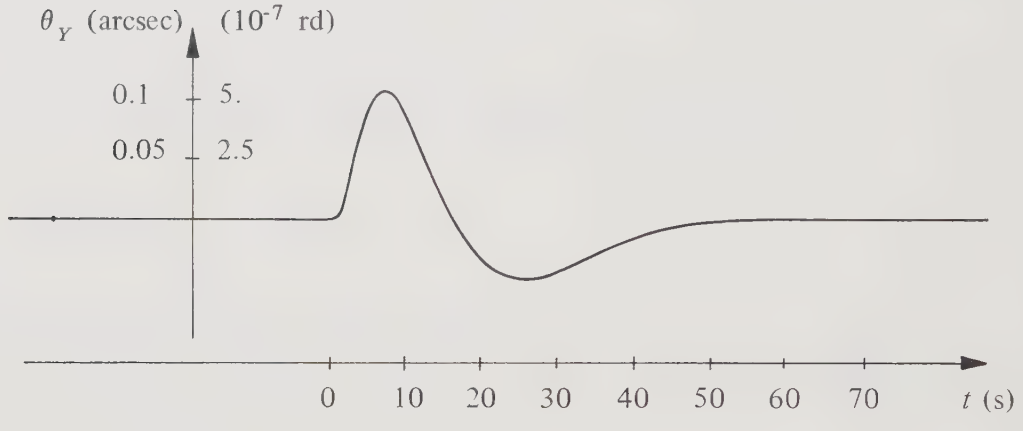
$$< \theta^2 > = B \int_{-\infty}^{+\infty} |H(j\omega)|^2 \, d\omega.$$

Si B est exprimé en (secondes d'arc)^2/Hz, cette expression devient :

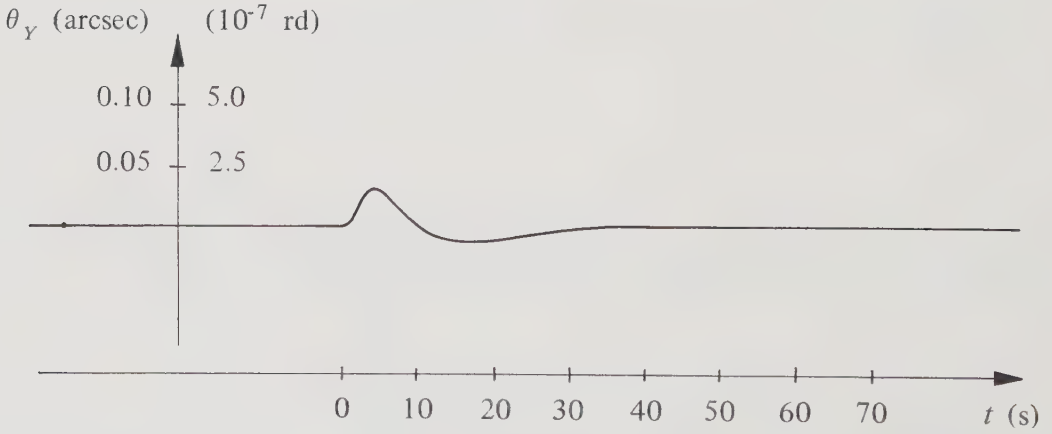
$$< \theta^2 > = 2\pi B \int_{-\infty}^{+\infty} |H(j\,2\pi\nu)|^2 \, d\nu$$



a) $K_2 = K_2' = 10$; $K_1 = K_1' = 0$



b) $K_2 = K_2' = 10$; $K_1 = K_1' = 1$



c) $K_2 = K_2' = 10$; $K_1 = K_1' = 10$

Figure 44.

ν étant la fréquence; $< \theta^2 >$ est alors donné en (secondes d'arc)^2. Il nous faut donc calculer l'intégrale

$$\mathfrak{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(j\,2\,\pi\,\nu)|^2 \, d\nu$$

et pour cela déterminer la fonction de transfert relative au bruit. Cette fonction de transfert peut être tirée du schéma fonctionnel simplifié de la Figure 45 où nous avons mis en évidence le bruit des senseurs de position.

Si on considère le bruit sur l'axe OY, on trouve :

$$\frac{\theta_Y(p)}{b_Y(p)} = H_{YY}(p) = \frac{K_Y\left(1 + \dfrac{1}{T_2\,p}\right)\left\{K_{YY} + K_{YZ}\,K_{ZY}\,\dfrac{R_{vZ}}{I_Z\,p^2 + R_{vZ}\,K_{ZZ}}\right\}}{I_Y\,p^2 + R_{vY}\left\{K_{YY} + K_{YZ}\,K_{ZY}\,\dfrac{R_{vZ}}{I_Z\,p^2 + R_{vZ}\,K_{ZZ}}\right\}}$$

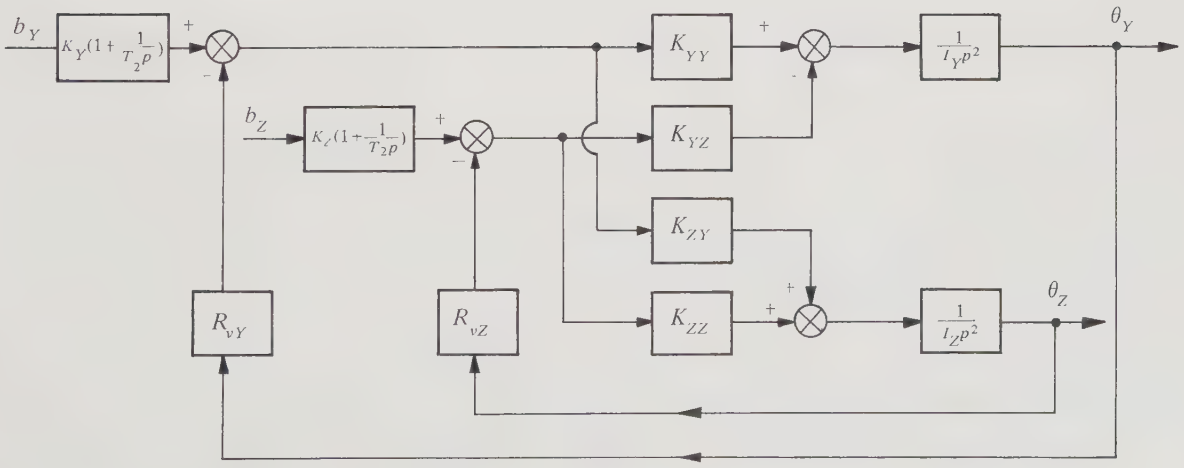
Étant donné la complexité de $H_{YY}(p)$, on ne peut calculer littéralement l'intégrale $\mathfrak{I}$. Aussi avons-nous utilisé le calculateur analogique et un générateur de bruit blanc pour déterminer la valeur de $\mathfrak{I}$. Nous avons pris B égal à 0,65 (seconde d'arc)^2/Hz et nous avons obtenu les courbes de la Figure 46 dont une bonne approximation peut être donnée par la formule :

$$\theta_{Y\,(rms)\,(arc\,sec)} \# 0{,}25\left[1 + 0{,}035\left(\frac{K_2'}{K_2}\right)^{1{,}2}\right]$$

La valeur de $\mathfrak{I}_Y$ s'en déduit immédiatement :

$$\mathfrak{I}_Y \# 0{,}1\left[1 + 0{,}035\left(\frac{K_2'}{K_2}\right)^{1{,}2}\right]^2$$

Figure 45.



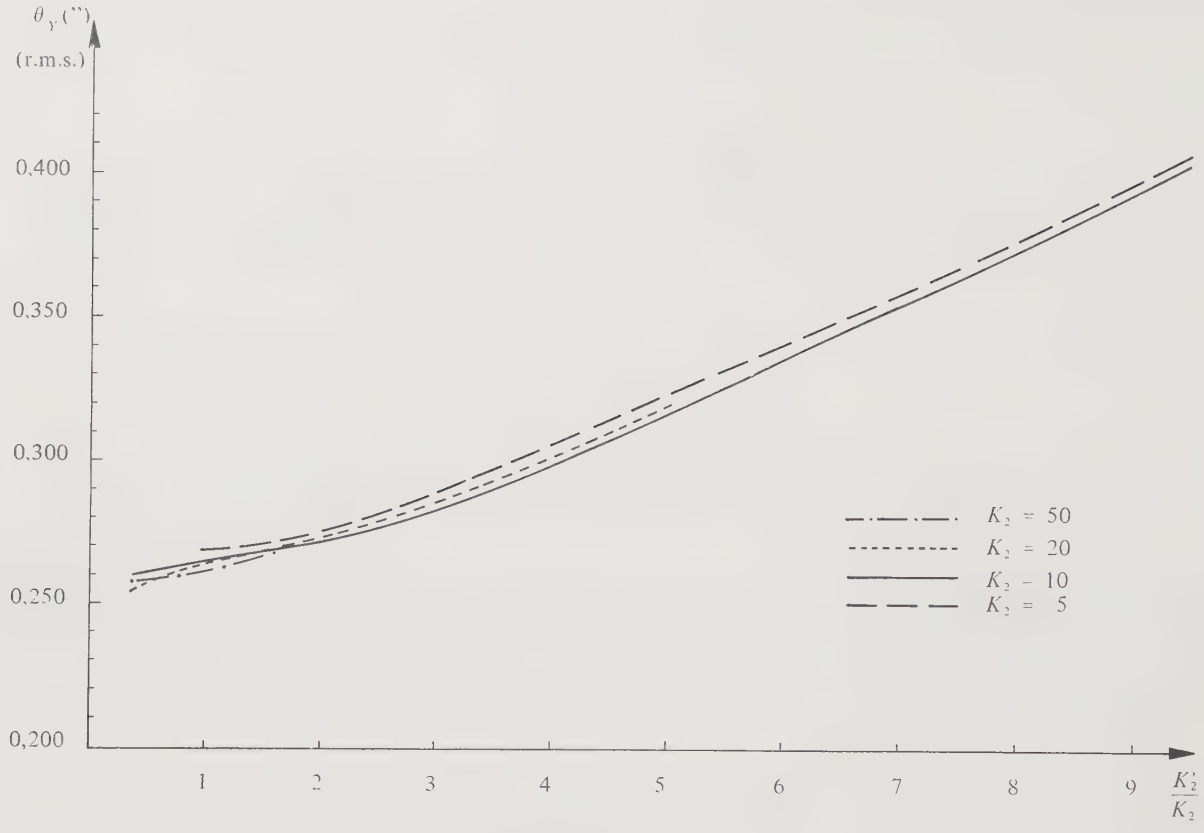
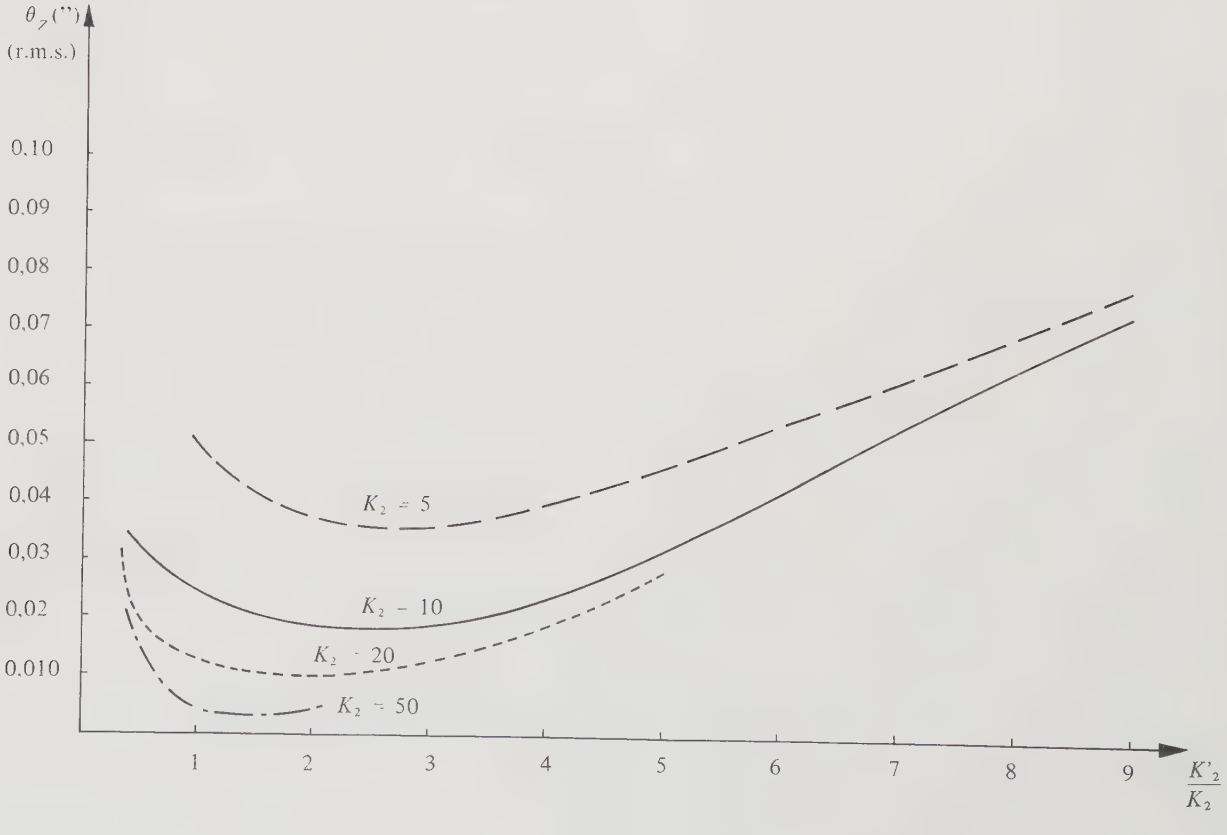


Figure 46.

Figure 47.



Remarque :

Si nous avons $\frac{K_Y}{I_Y} = \frac{K_Z}{I_Z}$, ce qui est le cas de notre simulation, nous pouvons écrire que

$$H_{ZZ}(p) = H_{YY}(p).$$

Par conséquent, si nous considérons un bruit sur l'axe OZ seul, la valeur quadratique moyenne de θ_Z est la même que celle de θ_Y dans des conditions analogues, ce que nous avons vérifié sur le calculateur analogique.

Par ailleurs, pour étudier le couplage des axes en présence du bruit des senseurs, nous avons considéré le cas d'un bruit sur l'axe OY et nous avons mesuré la valeur quadratique moyenne de θ_Z. Les résultats de ces mesures, résumés par les courbes de la Figure 47, montrent que la valeur quadratique moyenne de θ_Z en présence du bruit b_Y est faible devant la valeur quadratique moyenne de θ_Z en présence du bruit b_Z, et ceci d'autant plus que K_2 est grand.

5.7.3 EFFET DES FROTTEMENTS SECS DES ARMATURES DES GYROSCOPES

L'étude théorique complète du frottement sec dans les armatures des gyroscopes est difficile, même sur les équations très simplifiées. Nous avons en effet à résoudre les systèmes d'équations (5.7) à (5.10), (5.12) et le système :

$$\begin{cases} I_I \ddot{\beta}_1 = T_{m1} - D_\beta \cdot \dot{\beta}_1 - H_S(\dot{\alpha} + \dot{\theta}_Z) - h \operatorname{sign} \dot{\beta}_1 \\ (J_O + J_I)\ddot{\alpha}_1 = T_{m2} - D_\alpha \cdot \dot{\alpha}_1 + H_S(\dot{\beta}_1 + \dot{\theta}_Y) - h \operatorname{sign} \dot{\alpha}_1. \end{cases}$$

Ces équations permettent cependant dans un cas particulier d'arriver à des conclusions intéressantes, à partir desquelles nous ferons une étude qualitative du cas réel.

Après quelques transformations, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} R_Y = -T_{m1} + D_\beta \cdot \dot{\beta}_1 + h \operatorname{sign} \dot{\beta}_1 \\ R_Z = -T_{m2} + D_\alpha \cdot \dot{\alpha}_1 + h \operatorname{sign} \dot{\alpha}_1 \end{cases}$$

où h est la valeur du couple du frottement sec, supposé le même pour les deux axes de rotation.

Ainsi :

$$\begin{cases} I_Y \ddot{\theta}_Y = -T_{m1} + D_\beta \cdot \dot{\beta}_1 + h \operatorname{sign} \dot{\beta}_1 + T_{pY} \\ I_Z \ddot{\theta} = -T_{m2} + D_\alpha \cdot \dot{\alpha}_1 + h \operatorname{sign} \dot{\alpha}_1 + T_{pZ} \end{cases}$$

On voit sur ces équations que le couple du frottement sec a les mêmes conséquences qu'un couple perturbateur extérieur en créneau. Les conclusions de l'étude d'un couple perturbateur extérieur peuvent donc être appliquées à l'étude du frottement sec. Pour étudier avec plus de précision les effets du frottement sec sur θ_Y et θ_Z, nous allons maintenant envisager un cas particulier : nous supposerons les amortissements visqueux et K_2' nuls. Ceci nous permettra d'aborder ensuite le cas réel.

Cas particulier : $D_\alpha = D_\beta = 0$; $K_2' = 0$

Il est possible de décrire d'une façon précise le mouvement des armatures du gyroscope dans ce cas. En effet le système à résoudre se réduit alors à :

$$\begin{cases} I_I \ddot{\beta}_1 + H_S \dot{\alpha}_1 = -h \operatorname{sign} \dot{\beta}_1 \\ (J_O + J_I)\ddot{\alpha}_1 - H_S \dot{\beta}_1 = -h \operatorname{sign} \dot{\alpha}_1 \end{cases}$$

On en tire :

$$\begin{cases} \dot{\beta}_1 = A \sin(\omega t + \varphi) + \dfrac{h}{H_S} \operatorname{sign} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_1 = -A \sqrt{\dfrac{I_I}{J_O + J_I}} \cos(\omega t + \varphi) - \dfrac{h}{H_S} \operatorname{sign} \beta_1 \end{cases}$$

où

$$\omega = \frac{H_S}{\sqrt{I_I (J_O + J_I)}}$$

et A et φ sont des constantes dépendant des conditions initiales.

Ce mouvement peut être représenté dans le plan $(\dot{\alpha}_1, \dot{\beta}_1)$ par quatre arcs d'ellipse dont les centres se situent aux points $\left(\pm \dfrac{h}{H_S}, \pm \dfrac{h}{H_S} \right)$ de la Figure 48. La fréquence des oscillations de $\dot{\alpha}_1 (t)$ et $\dot{\beta}_1 (t)$

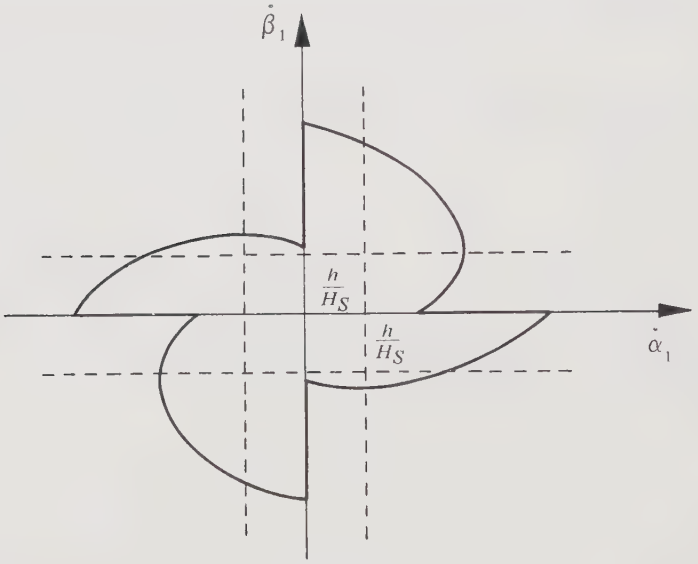


Figure 48.

est la même que celle qui a été calculée en l'absence de frottements secs (paragraphe 5.4) : 29,5 Hz avec nos valeurs numériques, valeur élevée devant les constantes de temps du satellite. Nous avons vu en effet que lors de l'application d'un couple perturbateur en échelon, la valeur maximum de l'angle de dépointage n'est atteinte qu'après 8,5 secondes. Le cycle limite résultant ne peut donc avoir qu'une amplitude très faible.

Pour vérifier ce résultat, nous avons simulé sur le calculateur analogique le couple de frottement sec représenté sur la Figure 49; nous y avons tenu compte d'une valeur de ce couple plus grande au démarrage des armatures, c'est-à-dire quand $\dot{\alpha}_1$ (ou $\dot{\beta}_1$) est inférieure à une valeur petite $(\dot{\alpha}_1)_0$.

Avec $h = 0{,}5$ N-m, $h_M = 10^{-4}$ N-m, $(\dot{\alpha}_1)_0 = 4 \times 10^{-8}$ rad/s et $K_2 = 10$, nous avons effectivement trouvé pour les angles de dépointage θ_Y et θ_Z un cycle limite de 2,5 et 2 millièmes de seconde d'arc seulement.

Cas plus général : $D_\alpha = D_\beta \neq 0$; $K'_2 \neq 0$

En l'absence de couple perturbateur extérieur T_p, les variations de $\dot{\alpha}_1 (t)$ et de $\dot{\beta}_1 (t)$ sont maintenant régies par les équations différentielles :

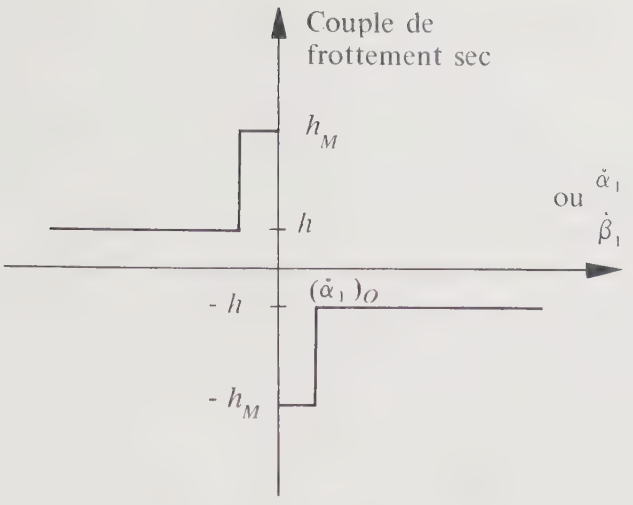


Figure 49.

$$\begin{cases} I_I \ddot{\beta}_1 + (K_2' + D_\beta)\dot{\beta}_1 + H_S \dot{\alpha}_1 = -h \operatorname{sign} \beta_1 \\ (J_O + J_I)\ddot{\alpha}_1 + (K_2' + D_\alpha)\dot{\alpha}_1 - H_S \dot{\beta}_1 = -h \operatorname{sign} \dot{\alpha}_1 \end{cases}$$

c'est-à-dire par deux équations du type :

$$\frac{I_I J}{H_S}\dddot{\beta}_1 + (I_I + J)\frac{K_2''}{H_S}\ddot{\beta}_1 + \left(\frac{K_2''^2}{H_S} + H_S\right)\dot{\beta}_1 = h \operatorname{sign} \dot{\alpha}_1 - h\frac{K_2''}{H_S} \operatorname{sign} \dot{\beta}_1$$

avec :

$$J = J_O + J_I \qquad \text{et} \qquad K_2'' = K_2' + D_\alpha.$$

La solution de ce type d'équation est bien connue : elle peut prendre trois formes différentes suivant les valeurs relatives des coefficients. Mais dans tous les cas, puisque le coefficient de $\dot{\beta}_1$ est positif, elle tend vers une valeur constante qui est déterminée par le deuxième membre de l'équation. Donc tout se passe comme si la trajectoire de la Figure 48 se resserrait quand le temps s'écoule, jusqu'au moment où il n'y a plus de commutation possible. On doit donc observer, à chaque perturbation, quelques oscillations de θ_Y et de θ_Z d'amplitude très faible (car la fréquence des commutations est assez élevée); après un temps suffisamment long, ces oscillations doivent disparaître.

Si on applique un couple perturbateur T_p en échelon, la réponse obtenue est la somme de la réponse précédente et de la réponse à T_p étudiée plus haut.

Ainsi lors de la simulation analogique, pour laquelle nous avons pris $K_2' = 10$ et $K_1' = 10$, l'angle maximum de dépointage est sensiblement le même que sans frottement sec et nous n'avons noté aucun cycle limite après la disparition des transitoires. Par conséquent, la présence de frottements secs de $0{,}5 \times 10^{-4}$ N-m dans les armatures des gyroscopes n'entraîne pas de dégradation sensible des performances; mais il convient cependant de les réduire pour éviter une perte d'énergie supplémentaire.

5.7.4 ACQUISITION STELLAIRE FINE

Dans ce paragraphe, nous allons donner rapidement quelques résultats sur les manœuvres d'acquisition stellaire fine. Nous supposerons que le satellite est dépointé de 10 minutes d'arc autour de l'axe OY et que nous voulons l'orienter à mieux que les 10 secondes d'arc qui permettent le début des mesures.

En faisant varier K_2'/K_2 de 0,5 à 10 et K_1' de 0 à 5, nous avons pu constater que sans les termes d'intégration K_1 et K_1', le rebondissement est légèrement plus faible qu'avec ces termes et qu'il est minimum pour $K_2'/K_2 = 0{,}5$. Par contre, la durée de l'acquisition à mieux de 10 secondes d'arc est minimum pour $K_2'/K_2 = 2$; elle est alors de 28 secondes. Un bon compromis est réalisé en prenant $K_2'/K_2 = 1$ comme pour la stabilisation fine, puisque pour cette valeur le rebondissement n'est que légèrement supérieur au minimum et la durée d'acquisition est à peine plus grande que la durée minimum : 28,5 secondes au lieu de 28.

Les intégrations K_1 et K_1' n'ont apporté qu'une dégradation de ces performances; leur intérêt principal n'est, comme nous l'avons vu, que la diminution du couplage des deux axes. Il est souhaitable de les supprimer dans le mode acquisition fine.

La Figure 50 montre les variations de $\theta_Y(t)$ avec $K_2 = K_2' = 10$ et $K_1 = K_1' = 0$.

5.7.5 RÉORIENTATION DE 10°

Cette manœuvre nécessitant des couples moteurs assez importants, nous avons supposé que les couples des moteurs des armatures des gyroscopes sont saturés à 1 N-m et nous avons simulé une caractéristique du type linéaire-saturé, du moins approximativement, car les éléments analogiques utilisés n'ont pas permis d'avoir un palier rigoureusement plat.

Pour cette manœuvre, nous voulons déplacer le satellite de 10° autour de l'axe OY. Cette phase peut être considérée comme terminée quand l'angle de dépointage θ_Y devient et reste inférieur au champ de vision du senseur stellaire gros que nous avons étudié plus haut ($\pm$ 10 minutes d'arc). A partir de cette valeur commence la phase acquisition fine étudiée plus haut.

La simulation a montré que les intégrations du vecteur erreur $\bar{\varepsilon}$ introduisent une instabilité quand un des couples des moteurs des armatures des gyroscopes atteint son niveau de saturation. Il est donc nécessaire de supprimer ces termes pour cette phase.

Par ailleurs, comme pour l'acquisition fine, les intégrations des asservissements de vitesse des armatures apportent une dégradation assez sensible des performances. Ces termes seront donc supprimés également pour la phase réorientation.

Toutes ces modifications entraînent un changement des conditions de stabilité et nous avons noté que le système devient instable dès que K_2'/K_2 est inférieur à 3,3. Cependant, la durée minimum de la réorientation a été obtenue pour $K_2'/K_2 = 3{,}5$ avec 21 secondes, après un rebondissement de 19,5 %. Le rebondissement est par contre minimum pour $K_2'/K_2 = 4$. Aussi pour assurer une marge de gain suffisante, nous avons choisi de prendre $K_2'/K_2 = 5$: le rebondissement est alors de 14 % et la durée de la manœuvre 26 secondes.

La Figure 51 présente les courbes essentielles obtenues dans ce cas ·

$$\theta_Y(t), \quad \dot{\alpha}_1(t) \qquad \text{et} \qquad T_{m1}(t).$$

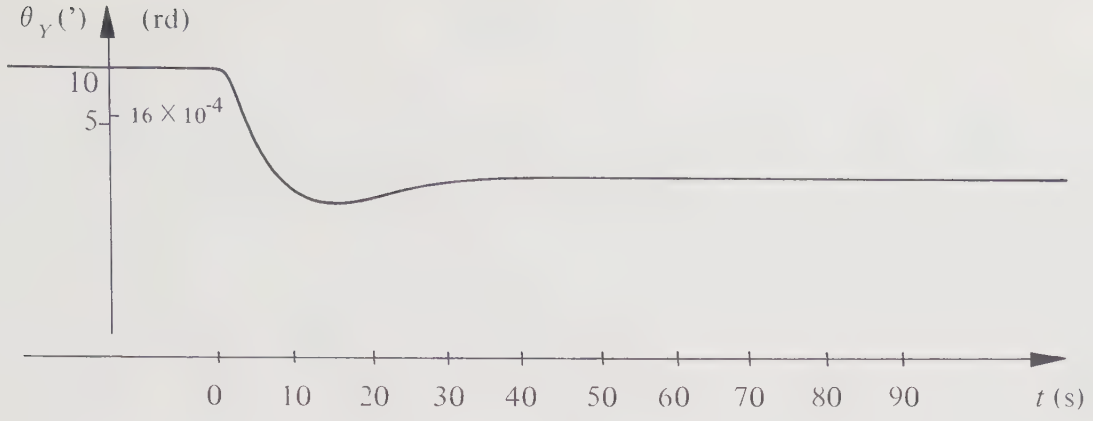
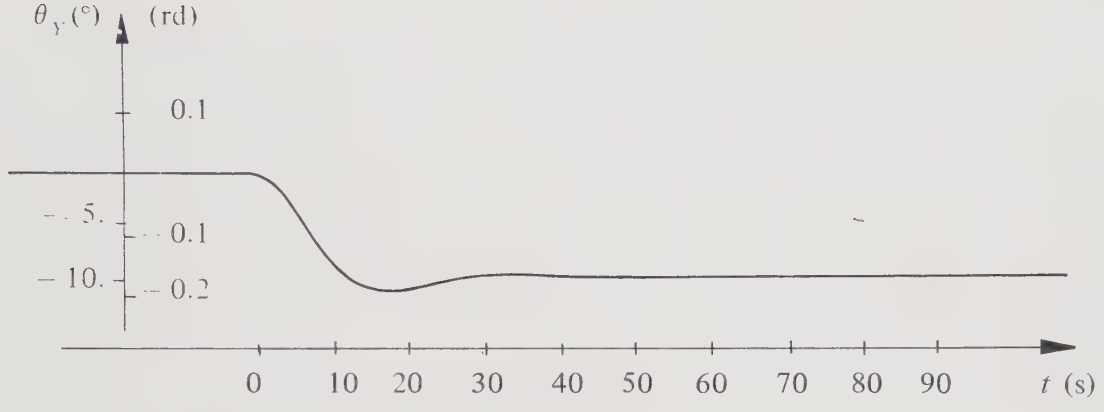


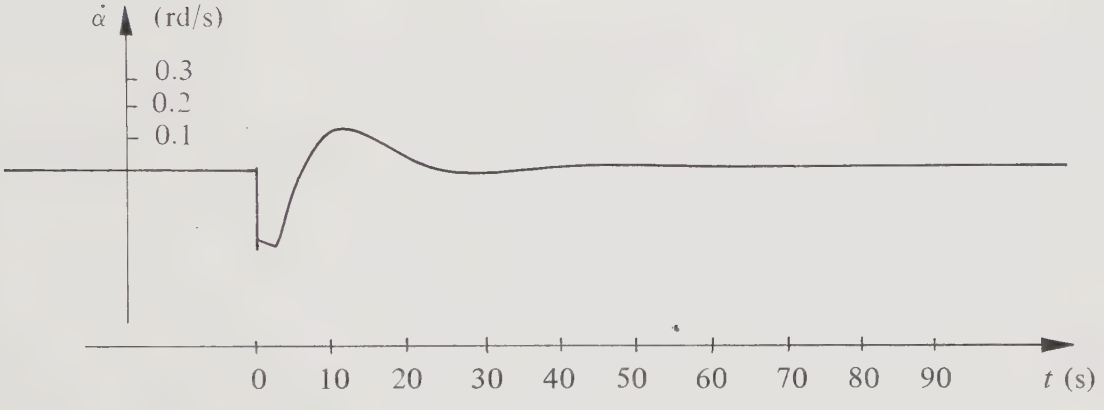
Figure 50 : Acquisition stellaire fine.

Figure 51 : Réorientation.

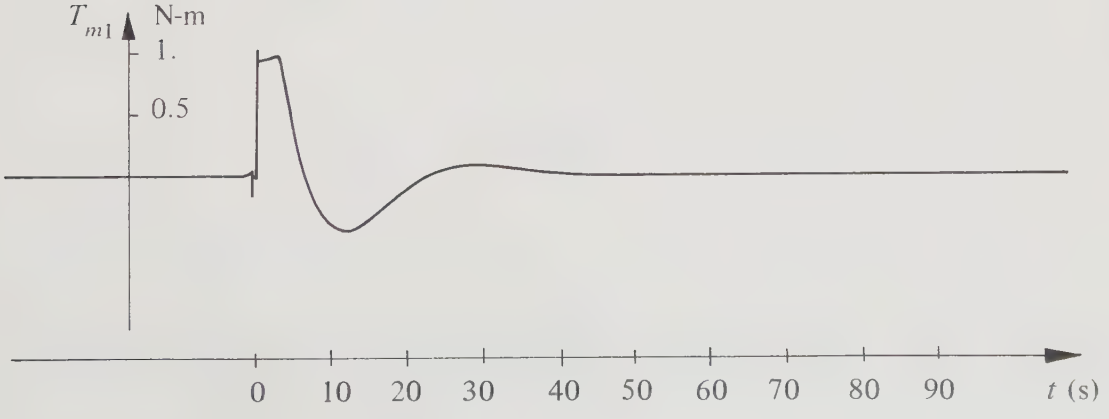
a)



b)



c)



CONCLUSION

La stabilisation d'un satellite astronomique par gyroscopes de commande de moment cinétique répond assez facilement aux exigences de précision de la spectroscopie infrarouge par transformation de Fourier. Deux difficultés essentielles sont apparues dans notre application où nous avons considéré deux gyroscopes à deux degrés de liberté : la détermination d'une loi de découplage et la stabilité de chacun des gyroscopes. La première a été levée en donnant une solution vectorielle exacte et la seconde en déterminant les conditions de stabilité. Les performances obtenues sont très satisfaisantes et permettent d'atteindre et même de dépasser assez largement la précision souhaitée. On pourra ainsi étudier à très haute résolution les spectres infrarouges d'un grand nombre d'étoiles froides et peut-être alors établir des théories plus précises et plus sûres sur l'origine et l'évolution de l'univers.

***

Je veux en terminant exprimer toute ma gratitude à M. le Professeur Surdin qui m'a initié à la recherche.

Je tiens à remercier particulièrement l'Organisation Européenne de Recherches Spatiales qui m'a permis de travailler pendant deux ans dans son Centre de recherches de l'ESTEC à Noordwijk (Pays-Bas), dans le cadre d'une bourse CERS/ESRO. Je remercie aussi M. E. Slachmuylders et M. D. N. Soo qui m'ont accueilli dans leur équipe. Je remercie également M. A. Scheffer pour m'avoir permis d'utiliser le calculateur analogique de l'ESTEC et M. M. Guérin pour l'aide et les conseils qu'il m'a apportés dans l'établissement et la mise au point des programmes analogiques.

ANNEXE 1

ÉTUDE DE LA LOI DE RÉPARTITION DE LA LUMIÈRE ENTRE LES DEUX SENSEURS STELLAIRES

Nous avons vu dans le paragraphe 2.2 que, du fait de sa position particulière, le diaphragme-miroir module l'intensité de la lumière reçue par chacun des deux senseurs quand l'angle de dépointage du télescope est compris entre deux valeurs θ'_1 et θ'_2. Si l'angle de dépointage est supérieur à θ'_2, le senseur stellaire gros fonctionne seul et si l'angle de dépointage est inférieur à θ'_1, toute la lumière est reçue par l'interféromètre et le senseur fin.

Nous allons étudier dans cette première Annexe comment on peut déterminer la loi de répartition de la lumière entre les deux senseurs.

Supposons que l'image de l'étoile se trouve dans le plan focal image du miroir primaire au point (x_0, y_0). Nous voulons calculer la fonction $R(x_0, y_0)$, cette fonction étant définie comme le rapport de la lumière reçue par l'ensemble interféromètre et senseur fin sur la lumière totale reçue par le télescope. Le calcul de la fonction $R(x_0,y_0)$ étant assez long, nous nous contenterons d'en donner les résultats.

Supposons que le faisceau reçu par le miroir primaire du télescope est cylindrique et homogène et de diamètre D. Le faisceau issu du miroir primaire forme un cône dont le sommet se trouve dans le plan focal au point (x_0,y_0). Son intersection avec le plan du diaphragme forme une ellipse de surface S, dont une partie de surface s est intérieure au diaphragme. Si le faisceau est homogène, nous aurons donc $R(x_0,y_0) = s/S$. Le calcul de la fonction R se ramène donc au calcul de deux surfaces.

On peut montrer que l'intersection du cône avec le plan du diaphragme a pour équation :

$$aX^2 + bX + cXY + dY + Y^2 + e = 0$$

avec :

$$a = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x_0}{F}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{y_0^2}{F^2} - \frac{D^2}{8F^2}$$

$$b = -\sqrt{2}\left[x_0\left(1 + \frac{x_0}{F}\right) + \frac{y_0^2}{F}\right]$$

$$c = 2\,y_0/F; \qquad d = -2\,y_0 \qquad \text{et} \qquad e = x_0^2 + y_0^2.$$

La surface de cette ellipse est donc :

$$S = \frac{\pi\, x_0^2\, D^2}{F^2\left[2\left(1 + \frac{x_0}{F}\right)^2 - \frac{D^2}{2F^2}\right]^{3/2}}.$$

Le calcul de la surface s est le calcul de la surface d'intersection de deux ellipses : l'ellipse de l'intersection du cône avec le plan du diaphragme et l'ellipse du trou du diaphragme. Quand le point (x_0, y_0) se trouve dans la région 2 de la Figure 9, les deux ellipses ont deux points d'intersection (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2). Il est nécessaire de les déterminer pour calculer s. Toutefois un calcul exact n'est pas possible. Aussi avons-nous déterminé des formules de récurrence qui permettent de les calculer de façon aussi précise que l'on veut. Par des raisonnements géométriques, il est possible de montrer que, dans notre cas particulier, la convergence est toujours obtenue.

On va donc écrire que :

$$\begin{cases} X_1 \\ Y_1 \end{cases} = \lim_{j \to \infty} \begin{cases} X_{j+1} \\ Y_{j+1} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} X_2 \\ Y_2 \end{cases} = \lim_{j \to \infty} \begin{cases} X'_{j+1} \\ Y'_{j+1} \end{cases}$$

On trouve ainsi :

$$\left| \begin{array}{l} Y_{j+1} = -\dfrac{b_j}{a_j} - \sqrt{\left(\dfrac{b_j}{a_j}\right)^2 - \dfrac{c_j}{a_j}} \\ \\ X_{j+1} = \dfrac{\delta_{in}}{2 X_j \cos\varphi} \left[\sqrt{X_j^2 + \dfrac{Y_j^2}{\cos^2\varphi}} - \dfrac{1}{\cos\varphi} Y_j Y_{j+1} \right] \end{array} \right.$$

en posant :

$$a_j = 1 + \frac{a}{\cos^4\varphi} \frac{Y_j^2}{X_j^2} - \frac{c}{\cos^2\varphi} \frac{Y_j}{X_j}$$

$$2 b_j = d - \frac{b}{\cos^2\varphi} \frac{Y_j}{X_j} + \frac{\delta_{in}}{2\cos\varphi} \sqrt{1 + \frac{Y_j^2}{X_j^2 \cos^2\varphi}} \left[c - \frac{2a}{\cos^2\varphi} \frac{Y_j}{X_j} \right]$$

$$c_j = e + \frac{a \delta_{in}^2}{2\cos^2\varphi} + \frac{a \delta_{in}^2}{4\cos^4\varphi} \frac{Y_j^2}{X_j^2} + \frac{b \delta_{in}}{2\cos\varphi} \sqrt{1 + \frac{Y_j^2}{X_j^2 \cos^2\varphi}}$$

avec pour premiers termes :

$$(Y_{j+1})_{j=0} = \frac{\delta_{in} \beta}{2\sqrt{\beta^2 + \alpha^2 \cos^2\varphi}} \qquad \text{et} \qquad (X_{j+1})_{j=0} = \frac{\delta_{in} \alpha}{2\sqrt{\beta^2 + \alpha^2 \cos^2\varphi}}$$

où

$$\alpha = \frac{2\sqrt{2}\, x_0 \left(1 + \dfrac{x_0}{F}\right)}{2\left(1 + \dfrac{x_0}{F}\right)^2 - \dfrac{D^2}{2F^2}} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{2 y_0 \left(1 + \dfrac{x_0}{F}\right) - \dfrac{D^2}{4F^2} y_0}{2\left(1 + \dfrac{x_0}{F}\right)^2 - \dfrac{D^2}{2F^2}}$$

De la même façon, on trouve que :

$$\left| \begin{array}{l} Y'_{j+1} = -\dfrac{b'_j}{a'_j} + \sqrt{\left(\dfrac{b'_j}{a'_j}\right)^2 - \dfrac{c'_j}{a'_j}} \\ \\ X'_{j+1} = \dfrac{\delta_{in}}{2 X'_j \cos\varphi} \left[\sqrt{X'^2_j + \dfrac{Y'^2_j}{\cos^2\varphi}} - \dfrac{Y'_j Y'_{j+1}}{\cos\varphi} \right] \end{array} \right.$$

a'_j, b'_j et c'_j ayant des expressions analogues à a_j, b_j et c_j en remplaçant X_j *et* Y_j par X'_j et Y'_j.

L'angle φ est l'angle (Ox, OX) de la Figure 8 et vaut dans notre cas 45°.

Les coordonnées (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) des points d'intersection des deux ellipses étant obtenues, la surface de l'intersection est calculée en écrivant que :

$$s = \frac{1}{2}\left\{ \frac{\delta_{in}^2}{4 \cos \varphi}\left[\text{Arc tg}\left(\frac{1}{\cos \varphi}\frac{Y_2}{X_2}\right) - \text{Arc tg}\left(\frac{1}{\cos \varphi}\frac{Y_1}{X_1}\right)\right] - \left|X_1 \beta - Y_1 \alpha\right| \div \left|X_2 \beta - \alpha Y_2\right|\right\}$$

$$+ \frac{x_0^2 D^2}{[4(F + x_0)^2 - D^2]\sqrt{4a - c^2}}\left[\text{Arc tg}\frac{\frac{Y_1 - \beta}{X_1 - \alpha} + \frac{c}{2}}{\sqrt{a - \frac{c^2}{4}}} - \text{Arc tg}\frac{\frac{Y_2 - \beta}{X_2 - \alpha} + \frac{c}{2}}{\sqrt{a - \frac{c^2}{4}}} + K\pi\right]$$

avec :

$$K = 0 \quad \text{si} \quad (X_2 - X_1)(\beta - Y_2) - (Y_2 - Y_1)(\alpha - X_1) > 0$$

$$K = 1 \quad \text{si} \quad (X_2 - X_1)(\beta - Y_2) - (Y_2 - Y_1)(\alpha - X_1) < 0.$$

Ceci conduit au faisceau de courbes de la Figure 52 où on a représenté la variation de R en fonction de $|x_0|$, chaque courbe étant tracée pour une valeur constante de $|y_0|$.

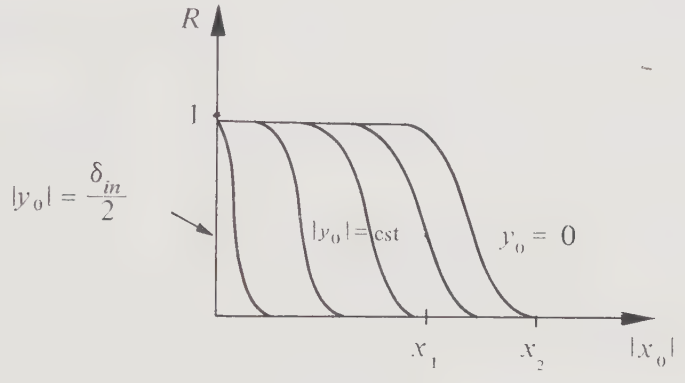


Figure 52.

Conclusion

Cette méthode peut fournir un moyen de sélectionner les senseurs quand l'image de l'étoile se trouve dans la région 2 de la Figure 9, en y traçant une fois pour toutes une ellipse à l'intérieur de laquelle le senseur fin est utilisé et à l'extérieur de laquelle on sélectionne le senseur gros, cette ellipse tenant compte évidemment de la différence de sensibilité entre les deux senseurs. Mais on peut plus simplement sélectionner les senseurs en comparant leur niveau de sortie; c'est cette dernière méthode qui a été jugée préférable.

ANNEXE 2

EXPRESSION ANALYTIQUE DE LA LOI DE COMMANDE DES VITESSES ANGULAIRES DES ARMATURES DES GYROSCOPES

Cette Annexe nous permettra d'établir l'expression analytique de la loi de commande des vitesses angulaires des gyroscopes de commande de moment cinétique à partir des équations vectorielles (4.16) et (4.17).

Nous considérerons plusieurs systèmes d'axes : ceux du satellite, en indice V, ceux de l'armature extérieure de chaque gyroscope, en indice $OG1$ ou $OG2$, et ceux de l'armature intérieure, en indice $IG1$ ou $IG2$. Ces systèmes d'axes sont définis sur la Figure 29.

Avant de donner les expressions de K_1 et de K_2, nous allons déterminer, dans les différents systèmes d'axes, les composantes des vecteurs apparaissant dans ces expressions.

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}_V = \begin{pmatrix} -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 \\ \sin\beta_1\cos\alpha_1 & \sin\alpha_1\sin\beta_1 & \cos\beta_1 \\ \cos\beta_1\cos\alpha_1 & \sin\alpha_1\cos\beta_1 & -\sin\beta_1 \end{pmatrix}_V^{IG1} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}_V$$

d'où :

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} -\varepsilon_1\sin\alpha_1 + \varepsilon_2\cos\alpha_1 \\ \varepsilon_1\cos\alpha_1\sin\beta_1 + \varepsilon_2\sin\alpha_1\sin\beta_1 + \varepsilon_3\cos\beta_1 \\ \varepsilon_1\cos\alpha_1\cos\beta_1 + \varepsilon_2\sin\alpha_1\cos\beta_1 - \varepsilon_3\sin\beta_1 \end{pmatrix}_{IG1}$$

de même :

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & 0 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\beta_2\sin\alpha_2 & \cos\beta_2 & \sin\beta_2\cos\alpha_2 \\ \cos\beta_2\sin\alpha_2 & -\sin\beta_2 & \cos\beta_2\cos\alpha_2 \end{pmatrix}_V^{IG2} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}_V$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon_1\cos\alpha_2 - \varepsilon_3\sin\alpha_2 \\ \varepsilon_1\sin\beta_2\sin\alpha_2 + \varepsilon_2\cos\beta_2 + \varepsilon_3\sin\beta_2\cos\alpha_2 \\ \varepsilon_1\cos\beta_2\sin\alpha_2 - \varepsilon_2\sin\beta_2 + \varepsilon_3\cos\beta_2\cos\alpha_2 \end{pmatrix}_{IG2}$$

or :

$$\bar{\omega}_1 = \begin{pmatrix} \dot{\beta}_1 - \omega_x\sin\alpha_1 + \omega_y\cos\alpha_1 \\ \dot{\alpha}_1\cos\beta_1 + \omega_x\cos\alpha_1\sin\beta_1 + \omega_y\sin\alpha_1\sin\beta_1 + \omega_z\cos\beta_1 \\ -\dot{\alpha}_1\sin\beta_1 + \omega_x\cos\alpha_1\cos\beta_1 + \omega_y\sin\alpha_1\cos\beta_1 - \omega_z\sin\beta_1 \end{pmatrix}_{IG1}$$

où ω_x, ω_y, ω_z sont les vitesses angulaires du satellite selon ses axes.

$$\bar{\omega}_2 = \begin{pmatrix} \dot{\beta}_2 + \omega_x \cos\alpha_2 - \omega_z \sin\alpha_2 \\ \dot{\alpha}_2 \cos\beta_2 + \omega_x \sin\beta_2 \sin\alpha_2 + \omega_y \cos\beta_2 + \omega_z \sin\beta_2 \cos\alpha_2 \\ -\dot{\alpha}_2 \sin\beta_2 + \omega_x \cos\beta_2 \sin\alpha_2 - \omega_y \sin\beta_2 + \omega_z \cos\beta_2 \cos\alpha_2 \end{pmatrix}_{IG1}$$

$$\bar{\tau}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_1 \end{pmatrix}_{OG1} = \begin{pmatrix} \tau_1 \sin\alpha_1 \\ \tau_1 \cos\alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix}_V = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_1 \sin\beta_1 \\ \tau_1 \cos\beta_1 \end{pmatrix}_{IG1}$$

$$\bar{\tau}_1 = \begin{pmatrix} \tau_1 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \\ \tau_1 (\cos\alpha_1 \sin\beta_2 \sin\alpha_2 + \sin\alpha_1 \cos\beta_2) \\ \tau_1 (\cos\alpha_1 \cos\beta_2 \sin\alpha_2 - \sin\alpha_1 \sin\beta_2) \end{pmatrix}_{IG2}$$

avec $\tau_1 = b_1/\cos\beta_1$ si on choisit la 2^e solution du paragraphe 4.3.4.3.*a*.

$$\bar{\tau}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_2 \end{pmatrix}_{OG2} = \begin{pmatrix} \tau_2 \sin\alpha_2 \\ 0 \\ \tau_2 \cos\alpha_2 \end{pmatrix}_V = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_2 \sin\beta_2 \\ \tau_2 \cos\beta_2 \end{pmatrix}_{IG2}$$

et :

$$\bar{\tau}_2 = \begin{pmatrix} -\tau_2 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \\ \tau_2 (\cos\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\alpha_2) \\ \tau_2 (\cos\alpha_1 \cos\beta_1 \sin\alpha_2 - \sin\beta_1 \cos\alpha_2) \end{pmatrix}_{IG1}$$

$$\bar{H}_{S1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_1 \end{pmatrix}_{IG1} = \begin{pmatrix} H_2 \cos\alpha_1 \cos\beta_1 \\ H_1 \sin\alpha_1 \cos\beta_1 \\ -H_1 \sin\beta_1 \end{pmatrix}_V$$

$$\bar{H}_{S1} = \begin{pmatrix} H_1 (\cos\alpha_1 \cos\beta_1 \cos\alpha_2 + \sin\beta_1 \sin\alpha_2) \\ H_1 (\cos\alpha_1 \cos\beta_1 \sin\beta_2 \sin\alpha_2 + \sin\alpha_1 \cos\beta_1 \cos\beta_2 - \sin\beta_1 \sin\beta_2 \cos\alpha_2) \\ H_1 (\cos\alpha_1 \cos\beta_1 \cos\beta_2 \sin\alpha_2 - \sin\alpha_1 \cos\beta_1 \sin\beta_2 - \sin\beta_1 \cos\beta_2 \cos\alpha_2) \end{pmatrix}_{IG2}$$

$$\bar{H}_{S2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_2 \end{pmatrix}_{IG2} = \begin{pmatrix} H_2 \cos\beta_2 \sin\alpha_2 \\ -H_2 \sin\beta_2 \\ H_2 \cos\beta_2 \cos\alpha_2 \end{pmatrix}_V$$

$$\bar{H}_{S2} = \begin{pmatrix} -H_2 (\sin\alpha_1 \cos\beta_2 \sin\alpha_2 + \cos\alpha_1 \sin\beta_2) \\ H_2 (\cos\alpha_1 \sin\beta_1 \cos\beta_2 \sin\alpha_2 - \sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\beta_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 \cos\alpha_2) \\ H_2 (\cos\alpha_1 \cos\beta_1 \cos\beta_2 \sin\alpha_2 - \sin\alpha_1 \cos\beta_1 \sin\beta_2 - \sin\beta_1 \cos\beta_2 \cos\alpha_2) \end{pmatrix}_{IG1}$$

Ayant les expressions des vecteurs dans les différents systèmes d'axes, nous pouvons maintenant calculer les coefficients K_1 et K_2 et les vitesses $\dot{\alpha}_1$, $\dot{\beta}_1$, $\dot{\alpha}_2$ et $\dot{\beta}_2$.

Pour calculer K_1 et K_2, il nous suffit de calculer six produits scalaires et de les remplacer ensuite par leur valeur dans les équations (4.16) :

$$\bar{H}_{S1} \cdot \bar{\tau}_1 = H_1 \tau_1 \cos\beta_1 = H_1 b_1$$

$$\bar{H}_{S2} \cdot \bar{\tau}_2 = H_2 \tau_2 \cos\beta_2 = H_2 b_2$$

$$\bar{H}_{S1} \cdot \bar{\varepsilon} = H_1 [\varepsilon_1 \cos\alpha_1 \cos\beta_1 + \varepsilon_2 \sin\alpha_1 \cos\beta_1 - \varepsilon_3 \sin\beta_1]$$

$$\bar{H}_{S2} \cdot \bar{\varepsilon} = H_2 [\varepsilon_1 \cos\beta_2 \sin\alpha_2 - \varepsilon_2 \sin\beta_2 + \varepsilon_3 \cos\beta_2 \cos\alpha_2]$$

$$\bar{H}_{S1} \cdot \bar{\tau}_2 = H_1 \tau_2 [\cos\alpha_1 \cos\beta_1 \sin\alpha_2 - \sin\beta_1 \cos\alpha_2]$$

$$\bar{H}_{S2} \cdot \bar{\tau}_1 = H_2 \tau_1 [\cos\alpha_1 \cos\beta_2 \sin\alpha_2 - \sin\alpha_1 \sin\beta_2]$$

Par ailleurs, nous devons calculer :

$$\bar{\tau}_1 \times \bar{\tau}_2,\ \bar{\tau}_1 \times \bar{\varepsilon} \text{ et } \bar{\tau}_2 \times \bar{\varepsilon}$$

$$\bar{\tau}_1 \times \bar{\tau}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_1 \sin \beta_1 \\ \tau_1 \cos \beta_1 \end{pmatrix}_{IG1} \times \begin{pmatrix} -\tau_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ \tau_2 (\cos \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \alpha_2) \\ \tau_2 (\cos \alpha_1 \cos \beta_1 \sin \alpha_2 - \sin \beta_1 \cos \alpha_2) \end{pmatrix}_{IG1}$$

ou, après développement et réduction,

$$\bar{\tau}_1 \times \bar{\tau}_2 = \begin{pmatrix} -\tau_1 \tau_2 \cos \alpha_2 \\ -\tau_1 \tau_2 \sin \alpha_1 \cos \beta_1 \sin \alpha_2 \\ \tau_1 \tau_2 \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \alpha_2 \end{pmatrix}_{IG1}$$

De même :

$$\bar{\tau}_2 \times \bar{\tau}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_2 \sin \beta_2 \\ \tau_2 \cos \beta_2 \end{pmatrix}_{IG2} \times \begin{pmatrix} \tau_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \\ \tau_1 (\cos \alpha_1 \sin \beta_2 \sin \alpha_2 + \sin \alpha_1 \cos \beta_2) \\ \tau_1 (\cos \alpha_1 \cos \beta_2 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \beta_2) \end{pmatrix}_{IG2}$$

d'où après développement et simplification :

$$\bar{\tau}_2 \times \bar{\tau}_1 = \begin{pmatrix} -\tau_1 \tau_2 \sin \alpha_1 \\ \tau_1 \tau_2 \cos \alpha_1 \cos \beta_2 \cos \alpha_2 \\ -\tau_1 \tau_2 \cos \alpha_1 \sin \beta_2 \cos \alpha_2 \end{pmatrix}_{IG2}$$

Enfin :

$$\bar{\tau}_1 \times \bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_1 \sin \beta_1 \\ \tau_1 \cos \beta_1 \end{pmatrix}_{IG1} \times \begin{pmatrix} -\varepsilon_1 \sin \alpha_1 + \varepsilon_2 \cos \alpha_1 \\ \varepsilon_1 \cos \alpha_1 \sin \beta_1 + \varepsilon_2 \sin \alpha_1 \sin \beta_1 + \varepsilon_3 \cos \beta_1 \\ \varepsilon_1 \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \varepsilon_2 \sin \alpha_1 \cos \beta_1 - \varepsilon_3 \sin \beta_1 \end{pmatrix}_{IG1}$$

d'où :

$$\bar{\tau}_1 \times \bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} -\varepsilon_3 \tau_1 \\ \tau_1 \cos \beta_1 (-\varepsilon_1 \sin \alpha_1 + \varepsilon_2 \cos \alpha_1) \\ \tau_1 \sin \beta_1 (\varepsilon_1 \sin \alpha_1 - \varepsilon_2 \cos \alpha_1) \end{pmatrix}_{IG1}$$

D'autre part :

$$\bar{\tau}_2 \times \bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_2 \sin \beta_2 \\ \tau_2 \cos \beta_2 \end{pmatrix}_{IG2} \times \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \cos \alpha_2 - \varepsilon_3 \sin \alpha_2 \\ \varepsilon_1 \sin \beta_2 \sin \alpha_2 + \varepsilon_2 \cos \beta_2 + \varepsilon_3 \sin \beta_2 \cos \alpha_2 \\ \varepsilon_1 \cos \beta_2 \sin \alpha_2 - \varepsilon_2 \sin \beta_2 + \varepsilon_3 \cos \beta_2 \cos \alpha_2 \end{pmatrix}_{IG2}$$

d'où :

$$\bar{\tau}_2 \times \bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} -\varepsilon_2 \tau_2 \\ \tau_2 \cos \beta_2 (\varepsilon_1 \cos \alpha_2 - \varepsilon_3 \sin \alpha_2) \\ -\tau_2 \sin \beta_2 (\varepsilon_1 \cos \alpha_2 - \varepsilon_3 \sin \alpha_2) \end{pmatrix}_{IG2}$$

Si nous groupons toutes ces équations, nous obtenons deux systèmes de trois équations permettant de calculer les vitesses angulaires des armatures :

$$\text{(A.2.1.)} \quad \left\| \begin{array}{l} \dot{\beta}_1 - \omega_x \sin \alpha_1 + \omega_y \cos \alpha_1 = -\tau_1 (K_1 \tau_2 \cos \alpha_2 + \varepsilon_3) \\ \dot{\alpha}_1 \cos \beta_1 + \omega_x \cos \alpha_1 \sin \beta_1 + \omega_y \sin \alpha_1 \sin \beta_1 + \omega_z \cos \beta_1 = \\ \qquad -\tau_1 \cos \beta_1 [K_1 \tau_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \varepsilon_1 \sin \alpha_1 - \varepsilon_2 \cos \alpha_1] \\ -\dot{\alpha}_1 \sin \beta_1 + \omega_x \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \omega_y \sin \alpha_1 \cos \beta_1 - \omega_z \sin \beta_1 = \\ \qquad \tau_1 \sin \beta_1 [K_1 \tau_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \varepsilon_1 \sin \alpha_1 - \varepsilon_2 \cos \alpha_1] \end{array} \right.$$

et :

$$
\text{(A.2.2.)} \quad \left\| \begin{array}{l}
\dot{\beta}_2 + \omega_x \cos \alpha_2 - \omega_z \sin \alpha_2 = - \tau_2 \left[K_2 \tau_1 \sin \alpha_2 + \varepsilon_2 \right] \\
\dot{\alpha}_2 \cos \beta_2 + \omega_x \sin \beta_2 \sin \alpha_2 + \omega_y \cos \beta_2 + \omega_z \sin \beta_2 \cos \alpha_2 = \\
\qquad \tau_2 \cos \beta_2 \left[K_2 \tau_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \varepsilon_1 \cos \alpha_2 - \varepsilon_3 \sin \alpha_2 \right] \\
- \dot{\alpha}_2 \sin \beta_2 + \omega_x \cos \beta_2 \sin \alpha_2 - \omega_y \sin \beta_2 + \omega_z \cos \beta_2 \cos \alpha_2 = \\
\qquad - \tau_2 \sin \beta_2 \left[K_2 \tau_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \varepsilon_1 \cos \alpha_2 - \varepsilon_3 \sin \alpha_2 \right]
\end{array} \right.
$$

Nous voyons que dans chacun des deux systèmes, la deuxième et la troisième équations ne peuvent pas être rigoureusement satisfaites en même temps. Ceci vient du fait que dans la définition de $\bar{\tau}_1$ et $\bar{\tau}_2$, nous n'avons pas tenu compte des vitesses angulaires du satellite et que par conséquent $\bar{\omega}_1$ et $\bar{\omega}_2$ ne sont pas rigoureusement perpendiculaires à $\bar{\tau}_1$ et à $\bar{\tau}_2$, comme nous l'avons supposé. Mais puisque ω_x, ω_y et ω_z sont petits, l'erreur ainsi faite est faible. Il est sans doute possible de définir des vecteurs $\bar{\tau}_1$ et $\bar{\tau}_2$ qui permettraient d'éviter cette erreur; mais alors le calcul des coefficients K_1 et K_2 serait beaucoup plus compliqué. Aussi retiendrons-nous les valeurs de $\dot{\beta}_1$, $\dot{\alpha}_1$, $\dot{\beta}_2$ et $\dot{\alpha}_2$ calculées à partir des deux premières équations de chaque système (pour éviter la division par $\sin \beta_1$ et $\sin \beta_2$).

L'expression analytique de la loi de commande des vitesses angulaires des armatures est donc :

$$
\text{(A.2.3.)} \quad \left\| \begin{array}{l}
\dot{\beta}_1 = - \tau_1 \left[K_1 \tau_2 \cos \alpha_2 + \varepsilon_3 \right] + \omega_x \sin \alpha_1 - \omega_y \cos \alpha_1 \\
\dot{\alpha}_1 = - \tau_1 \left[K_1 \tau_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \varepsilon_1 \sin \alpha_1 - \varepsilon_2 \cos \alpha_1 \right] - \omega_x \cos \alpha_1 \operatorname{tg} \beta_1 \\
\qquad - \omega_y \sin \alpha_1 \operatorname{tg} \beta_1 - \omega_z \\
\dot{\beta}_2 = - \tau_2 \left[K_2 \tau_1 \sin \alpha_1 + \varepsilon_2 \right] - \omega_x \cos \alpha_2 + \omega_z \sin \alpha_2 \\
\dot{\alpha}_2 = \tau_2 \left[K_2 \tau_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \varepsilon_1 \cos \alpha_2 - \varepsilon_3 \sin \alpha_2 \right] - \omega_x \operatorname{tg} \beta_2 \sin \alpha_2 \\
\qquad - \omega_y - \omega_z \operatorname{tg} \beta_2 \cos \alpha_2
\end{array} \right.
$$

ANNEXE 3

ÉQUATIONS ANALYTIQUES DU MOUVEMENT ET DU COUPLE DE RÉACTION DES GYROSCOPES

Les équations analytiques du mouvement et du couple de réaction des gyroscopes sont obtenues directement à partir des équations (4.2) et (4.4) en supposant les gyroscopes parfaits et en négligeant la non-coïncidence des centres de gravité des gyroscopes et du satellite. Les moments principaux d'inertie des armatures seront appelés I_O, J_O et K_O pour les armatures extérieures et I_I, J_I et K_I pour les armatures intérieures. Les angles α_i et β_i sont définis sur la Figure 29; ω_x, ω_y et ω_z sont les vitesses angulaires du satellite autour de ses axes principaux d'inertie.

Étant donné la longueur des calculs, nous appliquerons successivement et séparément à chaque gyroscope l'équation suivante tirée de (4.2) et de (4.4) :

$$\bar{R} = -(\dot{\bar{H}}_S)_{IG} - (\dot{\bar{H}}_O)_{IG} - (\dot{\bar{H}}_I)_{IG} - \bar{\omega}_I \times (\bar{H}_O + \bar{H}_I + \bar{H}_S) \tag{A.3.1}$$

1. Équations du gyroscope 1

Pour simplifier l'écriture, nous n'écrirons pas l'indice 1, car tout ce paragraphe ne concerne que le gyroscope 1.

Dans un premier temps, nous allons exprimer chacun des termes de l'équation (A.3.1) dans le système d'axes de l'armature intérieure. Ainsi :

$$\bar{H}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_S \end{pmatrix}_{IG}, \text{ d'ou } (\dot{\bar{H}}_S)_{IG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{H}_S \end{pmatrix} \tag{A.3.2}$$

Le moment cinétique de l'armature extérieure dans les axes de l'armature intérieure est :

$$\bar{H}_O^{IG} = \overleftrightarrow{I}_{OG}^{IG} \cdot \bar{\omega}_O^{IG}.$$

Or le tenseur d'inertie $\overleftrightarrow{I}_{OG}^{OG}$ de l'armature extérieure dans les axes de l'armature extérieure est :

$$\overleftrightarrow{I}_{OG}^{OG} = \begin{pmatrix} I_O & 0 & 0 \\ 0 & J_O & 0 \\ 0 & 0 & K_O \end{pmatrix},$$

par définition de I_O, J_O et K_O.

D'où :

$$\overleftrightarrow{I}_{OG}^{IG} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \overleftrightarrow{I}_{OG}^{OG} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

ou :

$$\overleftrightarrow{I}_{OG}^{IG} = \begin{pmatrix} I_O & 0 & 0 \\ 0 & J_O + (K_O - J_O)\sin^2\beta & (K_O - J_O)\sin\beta\cos\beta \\ 0 & (K_O - J_O)\sin\beta\cos\beta & K_O + (J_O - K_O)\sin^2\beta \end{pmatrix} \tag{A.3.3}$$

La vitesse de l'armature extérieure s'exprime dans les axes IG par :

$$\overline{\omega}_O^{IG} = \begin{pmatrix} -\omega_x\sin\alpha + \omega_y\cos\alpha \\ \dot{\alpha}\cos\beta + \omega_x\cos\alpha\sin\beta + \omega_y\sin\alpha\sin\beta + \omega_z\cos\beta \\ -\dot{\alpha}\sin\beta + (\omega_x\cos\alpha + \omega_y\sin\alpha)\cos\beta - \omega_z\sin\beta \end{pmatrix}_{IG} \tag{A.3.4}$$

D'où, après simplification :

$$\overline{H}_O^{IG} = \begin{pmatrix} I_O(-\omega_x\sin\alpha + \omega_y\cos\alpha) \\ J_O(\dot{\alpha} + \omega_z)\cos\beta + K_O(\omega_x\cos\alpha + \omega_y\sin\alpha)\sin\beta \\ -J_O(\dot{\alpha} + \omega_z)\sin\beta + K_O(\omega_x\cos\alpha + \omega_y\sin\alpha)\cos\beta \end{pmatrix}_{IG} \tag{A.3.5}$$

Le tenseur d'inertie $\overleftrightarrow{I}_{IG}^{IG}$ s'écrit simplement dans les axes IG :

$$\overleftrightarrow{I}_{IG}^{IG} = \begin{pmatrix} I_I & 0 & 0 \\ 0 & J_I & 0 \\ 0 & 0 & K_I \end{pmatrix},$$

I_I, J_I et K_I comprenant les moments d'inertie de l'armature intérieure et du rotor quand il est immobile dans l'armature intérieure. La vitesse $\overline{\omega}_I^{IG}$ de cette armature est :

$$\overline{\omega}_I^{IG} = \begin{pmatrix} \dot{\beta} - \omega_x\sin\alpha + \omega_y\cos\alpha \\ (\dot{\alpha} + \omega_z)\cos\beta + (\omega_x\cos\alpha + \omega_y\sin\alpha)\sin\beta \\ -(\dot{\alpha} + \omega_z)\sin\beta + (\omega_x\cos\alpha + \omega_y\sin\alpha)\cos\beta \end{pmatrix}_{IG}$$

Par conséquent $\overline{H}_I^{IG}$ est donné par :

$$\overline{H}_I^{IG} = \begin{pmatrix} I_I(\dot{\beta} - \omega_x\sin\alpha + \omega_y\cos\alpha) \\ J_I[(\dot{\alpha} + \omega_z)\cos\beta + (\omega_x\cos\alpha + \omega_y\sin\alpha)\sin\beta] \\ K_I[-(\dot{\alpha} + \omega_z)\sin\beta + (\omega_x\cos\alpha + \omega_y\sin\alpha)\cos\beta] \end{pmatrix}_{IG} \tag{A.3.6}$$

Donc si on appelle $\overline{H}_g^{IG}$ la somme $\overline{H}_g^{IG} = \overline{H}_S^{IG} + \overline{H}_O^{IG} + \overline{H}_I^{IG}$, (A.3.2), (A.3.5) et (A.3.6) permettent d'écrire :

$$\overline{H}_g^{IG} = \begin{pmatrix} (I_O + I_I)(-\omega_x\sin\alpha + \omega_y\cos\alpha) + I_I\dot{\beta} \\ (J_O + J_I)(\dot{\alpha} + \omega_z)\cos\beta + (K_O + J_I)(\omega_x\cos\alpha + \omega_y\sin\alpha)\sin\beta \\ -(J_O + J_I)(\dot{\alpha} + \omega_z)\sin\beta + (K_O + K_I)(\omega_x\cos\alpha + \omega_y\sin\alpha)\cos\beta + H_S \end{pmatrix}_{IG} \tag{A.3.7}$$

On en déduit, en dérivant (A.3.7) par rapport au temps :

$$(\dot{\overline{H}}_g)_{IG} = \tag{A.3.8}$$

$$\begin{vmatrix} (I_O + I_I)[-\dot{\omega}_x\sin\alpha + \dot{\omega}_y\cos\alpha - (\omega_x\cos\alpha + \omega_y\sin\alpha)\dot{\alpha}] + I_I\ddot{\beta} \\ (J_O + J_I)[(\ddot{\alpha} + \dot{\omega}_z)\cos\beta - (\dot{\alpha} + \omega_z)\dot{\beta}\sin\beta] + (K_O + J_I)[(\dot{\omega}_x\cos\alpha + \dot{\omega}_y\sin\alpha)\sin\beta \\ \quad + (-\omega_x\sin\alpha + \omega_y\cos\alpha)\dot{\alpha}\sin\beta + (\omega_x\cos\alpha + \omega_y\sin\alpha)\beta\cos\beta] \\ -(J_O + K_I)[(\ddot{\alpha} + \dot{\omega}_z)\sin\beta + (\dot{\alpha} + \omega_z)\beta\cos\beta] + (K_O + K_I)[(\dot{\omega}_x\cos\alpha + \dot{\omega}_y\sin\alpha)\cos\beta \\ \quad + (-\omega_x\sin\alpha + \omega_y\cos\alpha)\dot{\alpha}\cos\beta - (\omega_x\cos\alpha + \omega_y\sin\alpha)\dot{\beta}\sin\beta] + \dot{H}_S \end{vmatrix}_{IG}$$

Cette dérivée étant calculée par rapport aux axes IG animés de la vitesse $\overline{\omega}_I$, il faut donc calculer le produit vectoriel $\overline{\omega}_I \times \overline{H}_g$ dans les axes IG; après simplification, on trouve alors :

(A.3.9)

$$\overline{\omega}_I^{IG} \times \overline{H}_g^{IG} = \left| \begin{array}{l} (\dot{\alpha} + \omega_z)^2 (J_I - K_I) \sin\beta \cos\beta + (\omega_x \cos\alpha + \omega_y \sin\alpha)^2 (K_I - J_I) \sin\beta \cos\beta \\ \quad + (\dot{\alpha} + \omega_z)(\omega_x \cos\alpha + \omega_y \sin\alpha)[K_O - J_O + (K_I - J_I)(\cos^2\beta - \sin^2\beta)] \\ \quad + H_S[(\dot{\alpha} + \omega_z)\cos\beta + (\omega_x \cos\alpha + \omega_y \sin\alpha)\sin\beta] \\ \dot{\beta}[(J_O + K_I - I_I)(\dot{\alpha} + \omega_z)\sin\beta + (I_I - K_O - K_I)(\omega_x \cos\alpha + \omega_y \sin\alpha)\cos\beta - H_S] \\ \quad + (-\omega_x \sin\alpha + \omega_y \cos\alpha)[(J_O - I_O + K_I - I_I)(\dot{\alpha} + \omega_z)\sin\beta \\ \quad + (I_O + I_I - K_O - K_I)(\omega_x \cos\alpha + \omega_y \sin\alpha)\cos\beta - H_S] \\ \dot{\beta}[(J_O + J_I - I_I)(\dot{\alpha} + \omega_z)\cos\beta + (K_O + J_I - I_I)(\omega_x \cos\alpha + \omega_y \sin\alpha)\sin\beta \\ \quad + (-\omega_x \sin\alpha + \omega_y \cos\alpha)[(J_O + J_I - I_O - I_I)(\dot{\alpha} + \omega_z)\cos\beta \\ \quad + (K_O + J_I - I_I - I_O)(\omega_x \cos\alpha + \omega_y \sin\alpha)\sin\beta \end{array} \right|_{IG}$$

L'expression dans les axes IG du couple de réaction dû au gyroscope 1 s'obtient maintenant en faisant la somme $\overline{R}_1 = -(\dot{\overline{H}}_g)_{IG} - \overline{\omega}_I^{IG} \times \overline{H}_g^{IG}$ des équations (A.3.8) et (A.3.9).

Après simplification, on trouve :

(A.3.10)

$$\left| \begin{array}{l} -R_{X1}^{IG1} = I_I \ddot{\beta} + (I_O + I_I)[-\dot{\omega}_x \sin\alpha + \dot{\omega}_y \cos\alpha - (\omega_x \cos\alpha + \omega_y \sin\alpha)\dot{\alpha}] \\ \quad + (J_I - K_I)\sin\beta\cos\beta[(\dot{\alpha} + \omega_z)^2 - (\omega_x \cos\alpha + \omega_y \sin\alpha)^2] \\ \quad + [K_O - J_O + (K_I - J_I)\cos 2\beta](\dot{\alpha} + \omega_z)(\omega_x \cos\alpha + \omega_y \sin\alpha) \\ \quad + H_S[(\dot{\alpha} + \omega_z)\cos\beta + (\omega_x \cos\alpha + \omega_y \sin\alpha)\sin\beta] \\ -R_{Y1}^{IG1} = (J_O + J_I)(\ddot{\alpha} + \dot{\omega}_z)\cos\beta + (K_I - J_I - I_I)(\dot{\alpha} + \omega_z)\beta\sin\beta + (K_O + J_I)(\dot{\omega}_x \cos\alpha \\ \quad + \dot{\omega}_y \sin\alpha)\sin\beta + (-\omega_x \sin\alpha + \omega_y \cos\alpha)[(K_O + J_O - I_O + K_I + J_I - I_I)\dot{\alpha}\sin\beta \\ \quad + (J_O - I_O + K_I - I_I)\omega_z \sin\beta + (I_O - K_O + I_I - K_I)(\omega_x \cos\alpha + \omega_y \sin\alpha)\cos\beta] \\ \quad + (I_I + J_I - K_I)(\omega_x \cos\alpha + \omega_y \sin\alpha)\dot{\beta}\cos\beta - H_S(\dot{\beta} - \omega_x \sin\alpha + \omega_y \cos\alpha) \\ -R_{Z1}^{IG1} = -(J_O + K_I)(\ddot{\alpha} + \dot{\omega}_z)\sin\beta - (K_I + I_I - J_I)(\dot{\alpha} + \omega_z)\dot{\beta}\cos\beta + (K_O + K_I)(\dot{\omega}_x \cos\alpha \\ \quad + \dot{\omega}_y \sin\alpha)\cos\beta + (-\omega_x \sin\alpha + \omega_y \cos\alpha)[(K_O + J_O - I_O + K_I + J_I - I_I)\dot{\alpha}\cos\beta \\ \quad + (J_O - I_O + J_I - I_I)\omega_z \cos\beta + (K_O - I_O + J_I - I_I)(\omega_x \cos\alpha + \omega_y \sin\alpha)\sin\beta] \\ \quad - (K_I + I_I - J_I)(\omega_x \cos\alpha + \omega_y \sin\alpha)\dot{\beta}\sin\beta + \dot{H}_S \end{array} \right.$$

Pour les équations de mouvement des armatures, il est nécessaire d'exprimer ces équations dans le système d'axes de l'armature extérieure.

Expression de $\bar{R}$ dans le système d'axes de l'armature extérieure :

On l'obtient aisément en écrivant que :

$$\begin{aligned} -R_{X1}^{OG1} &= -R_{X1}^{IG1} \\ -R_{Y1}^{OG1} &= -R_{Y1}^{IG1}\cos\beta + R_{Z1}^{IG1}\sin\beta \\ -R_{Z1}^{OG1} &= -R_{Y1}^{IG1}\sin\beta - R_{Z1}^{IG1}\cos\beta \end{aligned}$$

D'où, après simplification, (A.3.11)

$$\left| \begin{array}{l} -R_{X1}^{OG1} = I_I \ddot{\beta} + (I_O + I_I)[-\dot{\omega}_x \sin\alpha + \dot{\omega}_y \cos\alpha - (\omega_x \cos\alpha + \omega_y \sin\alpha)\dot{\alpha}] \\ \quad + (J_I - K_I)\sin\beta\cos\beta[(\dot{\alpha} + \omega_z)^2 - (\omega_x \cos\alpha + \omega_y \sin\alpha)^2] \\ \quad + [K_O - J_O + (K_I - J_I)\cos 2\beta](\dot{\alpha} + \omega_z)(\omega_x \cos\alpha + \omega_y \sin\alpha) \\ \quad + H_S[(\dot{\alpha} + \omega_z)\cos\beta + (\omega_x \cos\alpha + \omega_y \sin\alpha)\sin\beta] \\ -R_{Y1}^{OG1} = [J_O + J_I \cos^2\beta + K_I \sin^2\beta](\ddot{\alpha} + \dot{\omega}_z) + (K_I - J_I)(\dot{\alpha} + \omega_z)\dot{\beta}\sin 2\beta \\ \quad + (J_I - K_I)\sin\beta\cos\beta(\dot{\omega}_x \cos\alpha + \dot{\omega}_y \sin\alpha) + (-\omega_x \sin\alpha + \omega_y \cos\alpha) \times \\ \quad \times [(K_I - J_I)\omega_z \sin\beta\cos\beta + (I_O - K_O + I_I - J_I \sin^2\beta - K_I \cos^2\beta)(\omega_x \cos\alpha + \omega_y \sin\alpha)] \\ \quad + [I_I + (J_I - K_I)\cos 2\beta](\omega_x \cos\alpha + \omega_y \sin\alpha)\beta \\ \quad - H_S \cos\beta(\dot{\beta} - \omega_x \sin\alpha + \omega_y \cos\alpha) - \dot{H}_S \sin\beta \end{array} \right.$$

$$
\begin{aligned}
-R_{Z1}^{OG1} &= (J_I - K_I)(\ddot{\alpha} + \dot{\omega}_z)\sin\beta\cos\beta - [I_I + (K_I - J_I)\cos 2\beta](\dot{\alpha} + \omega_z)\dot{\beta} \\
&+ (K_O + J_I\sin^2\beta + K_I\cos^2\beta)(\dot{\omega}_x\cos\alpha + \dot{\omega}_y\sin\alpha) + (-\omega_x\sin\alpha + \omega_y\cos\alpha)\times \\
&\times [(K_O + J_O - I_O + K_I + J_I - I_I)\dot{\alpha} + (J_O - I_O - I_I + K_I\sin^2\beta + J_I\cos^2\beta)\omega_z \\
&+ (J_I - K_I)(\omega_x\cos\alpha + \omega_y\sin\alpha)\sin\beta\cos\beta] + (J_I - K_I)(\omega_x\cos\alpha \\
&+ \omega_y\sin\alpha)\dot{\beta}\sin 2\beta - H_S\sin\beta(\dot{\beta} - \omega_x\sin\alpha + \omega_y\cos\alpha) + \dot{H}_S\cos\beta
\end{aligned}
$$

Nous pouvons maintenant exprimer ces couples dans les axes du satellite.

Expression de R dans les axes du satellite :

Pour cela on écrit :

$$
\begin{cases}
-R_{X1}^{V} = R_{X1}^{OG1}\sin\alpha - R_{Z1}^{OG1}\cos\alpha \\
-R_{Y1}^{V} = -R_{X1}^{OG1}\cos\alpha - R_{Z1}^{OG1}\sin\alpha \\
-R_{Z1}^{V} = -R_{Y1}^{OG1}
\end{cases}
$$

d'où, après simplification : (A.3.12)

$$
\begin{aligned}
-R_{X1}^{V} &= -I_I\ddot{\beta}\sin\alpha + (J_I - K_I)(\ddot{\alpha} + \dot{\omega}_z)\cos\alpha\sin\beta\cos\beta + \dot{\omega}_x[(I_O + I_I)\sin^2\alpha + (K_O + J_I\sin^2\beta \\
&+ K_I\cos^2\beta)\cos^2\alpha] + \dot{\omega}_y\sin\alpha\cos\alpha[K_O + J_I\sin^2\beta + K_I\cos^2\beta - I_O - I_I] \\
&+ \dot{\alpha}\omega_x[I_O - K_O + I_I - K_I\cos^2\beta - J_I\sin^2\beta]\sin 2\alpha \\
&+ \dot{\alpha}\omega_y[J_O + J_I + (K_O + K_I - I_O - I_I)\cos 2\alpha + 2(K_I - J_I)\sin^2\alpha\sin^2\beta] \\
&- [I_I + (K_I - J_I)\cos 2\beta](\dot{\alpha} + \omega_z)\dot{\beta}\cos\alpha + (J_I - K_I)(\omega_x\cos\alpha + \omega_y\sin\alpha)\dot{\beta}\cos\alpha\sin 2\beta \\
&- (J_I - K_I)(\dot{\alpha} + \omega_z)^2\sin\alpha\sin\beta\cos\beta + \omega_y^2(J_I - K_I)\sin\alpha\sin\beta\cos\beta \\
&+ \omega_x\omega_y(J_I - K_I)\cos\alpha\sin\beta\cos\beta \\
&+ \omega_x\omega_z(I_O + I_I - K_O - K_I\cos^2\beta - J_I\sin^2\beta)\sin\alpha\cos\alpha \\
&+ \omega_y\omega_z[J_O + J_I - (K_O + K_I)\sin^2\alpha - (I_O + I_I)\cos^2\alpha + (K_I - J_I)\sin^2\beta(1 + \sin^2\alpha)] \\
&- H_S[(\dot{\alpha} + \omega_z)\sin\alpha\cos\beta + \dot{\beta}\cos\alpha\sin\beta + \omega_y\sin\beta] + \dot{H}_S\cos\alpha\cos\beta \\
-R_{Y1}^{V} &= I_I\ddot{\beta}\cos\alpha + (J_I - K_I)(\ddot{\alpha} + \dot{\omega}_z)\sin\alpha\sin\beta\cos\beta + \dot{\omega}_x\sin\alpha\cos\alpha[K_O - I_O + K_I\cos^2\beta \\
&+ J_I\sin^2\beta - I_I] + \dot{\omega}_y[(I_O + I_I)\cos^2\alpha + (K_O + J_I\sin^2\beta + K_I\cos^2\beta)\sin^2\alpha] \\
&- \dot{\alpha}\omega_x[(K_O + K_I - I_O - I_I)\cos 2\alpha - J_O - J_I + 2(J_I - K_I)\cos^2\alpha\sin^2\beta] \\
&+ \dot{\alpha}\omega_y[K_O - I_O - I_I + K_I\cos^2\beta + J_I\sin^2\beta]\sin 2\alpha \\
&- (\dot{\alpha} + \omega_z)\dot{\beta}[I_I + (K_I - J_I)\cos 2\beta]\sin\alpha + (J_I - K_I)(\omega_x\cos\alpha + \omega_y\sin\alpha)\dot{\beta}\sin\alpha\sin 2\beta \\
&+ (\dot{\alpha} + \omega_z)^2(J_I - K_I)\cos\alpha\sin\beta\cos\beta - \omega_x^2(J_I - K_I)\cos\alpha\sin\beta\cos\beta \\
&- \omega_x\omega_y(J_I - K_I)\sin\alpha\sin\beta\cos\beta \\
&+ \omega_x\omega_z[-J_O - J_I + (K_O + K_I)\cos^2\alpha + (I_O + I_I)\sin^2\alpha + (J_I - K_I)\sin^2\beta(1 + \cos^2\alpha)] \\
&+ \omega_y\omega_z[K_O - I_O - I_I + K_I\cos^2\beta + J_I\sin^2\beta] \\
&+ H_S[(\dot{\alpha} + \omega_z)\cos\alpha\cos\beta - \beta\sin\alpha\sin\beta + \omega_x\sin\beta] + \dot{H}_S\sin\alpha\cos\beta \\
-R_{Z1}^{V} &= [J_O + J_I\cos^2\beta + K_I\sin^2\beta](\ddot{\alpha} + \dot{\omega}_z) + (K_I - J_I)(\dot{\alpha} + \omega_z)\dot{\beta}\sin 2\beta \\
&+ (J_I - K_I)\sin\beta\cos\beta(\dot{\omega}_x\cos\alpha + \dot{\omega}_y\sin\alpha) + (-\omega_x\sin\alpha + \omega_y\cos\alpha)\times \\
&\times [(K_I - J_I)\omega_z\sin\beta\cos\beta + (I_O - K_O + I_I - K_I\cos^2\beta - J_I\sin^2\beta)(\omega_x\cos\alpha + \omega_y\sin\alpha)] \\
&+ [I_I + (J_I - K_I)\cos 2\beta](\omega_x\cos\alpha + \omega_y\sin\alpha)\dot{\beta} \\
&- H_S\cos\beta(\dot{\beta} - \omega_x\sin\alpha + \omega_y\cos\alpha) - \dot{H}_S\sin\beta
\end{aligned}
$$

Les équations (A.3.12) donnent donc les équations des couples de réaction du gyroscope 1 sur le satellite. Les équations de mouvement des armatures sont données en écrivant :

$$
\begin{cases}
T_{mx1} = -R_{x1}^{OG1} + F_{x1} \\
T_{my1} = -R_{y1}^{OG1} + F_{y1}
\end{cases}
$$

où T_{mx1} et T_{my1} sont les couples des moteurs qui s'exercent sur les axes correspondants et F_{x1} et F_{y1} sont les couples de frottement sec ou visqueux.

Notons que ces systèmes d'équations sont valables pour les gyroscopes à 2 ou à 3 degrés de liberté : dans le cas du gyroscope à 2 degrés de liberté, on annule le terme H_S dans toutes les équations, alors que dans le cas du gyroscope à 3 degrés de liberté, on conserve tous les termes et aux 2 équations de mouvement des armatures, on ajoute une 3e équation pour le mouvement du rotor :

$$T_{mz1} = - R_{z1}^{IG1} + F_{z1}.$$

2. Équations du gyroscope 2

Ces équations peuvent être obtenues de la même façon que pour le gyroscope 1. Mais il est plus rapide de les obtenir par permutations circulaires.

Ainsi pour les équations dans les axes des armatures intérieure ou extérieure, nous changerons seulement ω_y en ω_x, ω_z en ω_y et ω_x en ω_z. Pour les équations dans les axes du satellite, nous changerons en plus R_{X1}^V, R_{Y1}^V et R_{Z1}^V en R_{Z2}^V, R_{X2}^V et R_{Y2}^V.

Équations dans les axes de l'armature intérieure : (A.3.13)

$$\begin{aligned}
- R_{X2}^{IG2} &= I_I \ddot{\beta} + (I_O + I_I)\,[\dot{\omega}_x \cos\alpha - \dot{\omega}_z \sin\alpha - (\omega_x \sin\alpha + \omega_z \cos\alpha)\,\dot{\alpha}] \\
&\quad + (J_I - K_I) \sin\beta \cos\beta\,[(\dot{\alpha} + \omega_z)^2 - (\omega_x \sin\alpha + \omega_z \cos\alpha)^2] \\
&\quad + [K_O - J_O + (K_I - J_I) \cos 2\beta]\,(\dot{\alpha} + \omega_y)\,(\omega_x \sin\alpha + \omega_z \cos\alpha) \\
&\quad + H_S\,[(\dot{\alpha} + \omega_y) \cos\beta + (\omega_x \sin\alpha + \omega_z \cos\alpha) \sin\beta] \\
- R_{Y2}^{IG2} &= (J_O + J_I)\,(\ddot{\alpha} + \dot{\omega}_y) \cos\beta + (K_I - J_I - I_I)\,(\dot{\alpha} + \omega_y)\,\dot{\beta} \sin\beta + (K_O + K_I)\,(\dot{\omega}_x \sin\alpha \\
&\quad + \dot{\omega}_z \cos\alpha) \sin\beta + (\omega_x \cos\alpha - \omega_z \sin\alpha)\,[(K_O + J_O - I_O + K_I + J_I - I_I)\,\dot{\alpha} \sin\beta \\
&\quad + (J_O - I_O + K_I - I_I)\,\omega_y \sin\beta + (I_O - K_O + I_I - K_I)\,(\omega_z \cos\alpha + \omega_x \sin\alpha) \cos\beta] \\
&\quad + (I_I + J_I - K_I)\,(\omega_x \sin\alpha + \omega_z \cos\alpha)\,\dot{\beta} \cos\beta - H_S\,(\dot{\beta} + \omega_x \cos\alpha - \omega_z \sin\alpha) \\
- R_{Z2}^{IG2} &= - (J_O + K_I)\,(\ddot{\alpha} + \dot{\omega}_y) \sin\beta - (K_I + I_I - J_I)\,(\dot{\alpha} + \omega_y)\,\dot{\beta} \cos\beta \\
&\quad + (K_O + K_I)\,(\dot{\omega}_x \sin\alpha + \dot{\omega}_z \cos\alpha) \cos\beta + (\omega_x \cos\alpha - \omega_z \sin\alpha)\,[(K_O + J_O - I_O + K_I \\
&\quad + J_I - I_I)\,\dot{\alpha} \cos\beta + (J_O - I_O + J_I - I_I)\,\omega_y \cos\beta + (K_O - I_O + J_I - I_I)\,(\omega_x \sin\alpha \\
&\quad + \omega_z \cos\alpha) \sin\beta] - (K_I + I_I - J_I)\,(\omega_x \sin\alpha + \omega_z \cos\alpha)\,\dot{\beta} \sin\beta + \dot{H}_S
\end{aligned}$$

Équations dans les axes de l'armature extérieure : (A.3.14)

$$\begin{aligned}
- R_{X2}^{OG2} &= I_I \ddot{\beta} + (I_O + I_I)\,[(\dot{\omega}_x \cos\alpha - \dot{\omega}_z \sin\alpha) - (\omega_x \sin\alpha + \omega_z \cos\alpha)\,\dot{\alpha}] \\
&\quad + (J_I - K_I) \sin\beta \cos\beta\,[(\dot{\alpha} + \omega_y)^2 - (\omega_x \sin\alpha + \omega_z \cos\alpha)^2] \\
&\quad + [K_O - J_O + (K_I - J_I) \cos 2\beta]\,(\dot{\alpha} + \omega_y)\,(\omega_x \sin\alpha + \omega_z \cos\alpha) \\
&\quad + H_S\,[(\dot{\alpha} + \omega_y) \cos\beta + (\omega_x \sin\alpha + \omega_z \cos\alpha) \sin\beta] \\
- R_{Y2}^{OG2} &= [J_O + J_I \cos^2\beta + K_I \sin^2\beta]\,(\ddot{\alpha} + \dot{\omega}_y) + (K_I - J_I)\,(\dot{\alpha} + \omega_y)\,\dot{\beta} \sin 2\beta \\
&\quad + (J_I - K_I) \sin\beta \cos\beta\,(\dot{\omega}_x \sin\alpha + \dot{\omega}_z \cos\alpha) + (\omega_x \cos\alpha - \omega_z \sin\alpha) \times \\
&\quad \times [(K_I - J_I)\,\omega_y \sin\beta \cos\beta + (I_O - K_O + I_I - J_I \sin^2\beta - K_I \cos^2\beta)\,(\omega_x \sin\alpha \\
&\quad + \omega_z \cos\alpha)] + [I_I + (J_I - K_I) \cos 2\beta]\,(\omega_x \sin\alpha + \omega_z \cos\alpha)\,\dot{\beta} \\
&\quad - H_S \cos\beta\,[\dot{\beta} + \omega_X \cos\alpha - \omega_Z \sin\alpha] - \dot{H}_S \sin\beta \\
- R_{Z2}^{OG2} &= (J_I - K_I)\,(\ddot{\alpha} + \dot{\omega}_y) \sin\beta \cos\beta - [I_I + (K_I - J_I) \cos 2\beta]\,(\dot{\alpha} + \omega_y)\,\dot{\beta} \\
&\quad + (K_O + J_I \sin^2\beta + K_I \cos^2\beta)\,(\dot{\omega}_x \sin\alpha + \dot{\omega}_z \cos\alpha) \\
&\quad + (\omega_x \cos\alpha - \omega_z \sin\alpha)\,[(K_O + J_O - I_O + K_I + J_I - I_I)\,\dot{\alpha} + (J_O - I_O - I_I + K_I \sin^2\beta \\
&\quad + J_I \sin^2\beta)\,\omega_y + (J_I - K_I)\,(\omega_x \sin\alpha + \omega_z \cos\alpha) \sin\beta \cos\beta] + (J_I - K_I)\,(\omega_x \sin\alpha \\
&\quad + \omega_z \cos\alpha)\,\dot{\beta} \sin 2\beta - H_S \sin\beta\,(\dot{\beta} + \omega_x \cos\alpha - \omega_z \sin\alpha) + \dot{H}_S \cos\beta
\end{aligned}$$

Équations dans les axes du satellite : (A.3.15)

$$
\begin{aligned}
-R^V_{X2} = {} & I_I\,\ddot{\beta}\cos\alpha + (J_I - K_I)(\ddot{\alpha} + \dot{\omega}_y)\sin\alpha\sin\beta\cos\beta + \dot{\omega}_z\sin\alpha\cos\alpha\,[K_O - I_O + K_I\cos^2\beta \\
& + J_I\sin^2\beta - I_I] + \dot{\omega}_x\,[(I_O + I_I)\cos^2\alpha + (K_O + J_I\sin^2\beta + K_I\cos^2\beta)\sin^2\alpha] \\
& - \dot{\alpha}\,\omega_z\,[(K_O + K_I - I_O - I_I)\cos 2\alpha - J_O - J_I + 2(J_I - K_I)\cos^2\alpha\sin^2\beta] \\
& + \dot{\alpha}\,\omega_x\,[K_O - I_O - I_I + K_I\cos^2\beta + J_I\sin^2\beta]\sin 2\alpha \\
& - (\dot{\alpha} + \omega_y)\,\dot{\beta}\,[I_I + (K_I - J_I)\cos 2\beta]\sin\alpha + (J_I - K_I)(\omega_x\sin\alpha + \omega_z\cos\alpha)\,\dot{\beta}\sin\alpha\sin 2\beta \\
& + (\dot{\alpha} + \omega_y)^2(J_I - K_I)\cos\alpha\sin\beta\cos\beta - \omega_z^2(J_I - K_I)\cos\alpha\sin\beta\cos\beta \\
& - \omega_x\,\omega_z(J_I - K_I)\sin\alpha\sin\beta\cos\beta \\
& + \omega_y\,\omega_z\,[-J_O - J_I + (K_O + K_I)\cos^2\alpha + (I_O + I_I)\sin^2\alpha + (J_I - K_I)\sin^2\beta(1 + \cos^2\alpha)] \\
& + \omega_x\,\omega_y\,[K_O - I_O - I_I + K_I\cos^2\beta + J_I\sin^2\beta] \\
& + H_S\,[(\dot{\alpha} + \omega_y)\cos\alpha\cos\beta - \dot{\beta}\sin\alpha\sin\beta + \omega_z\sin\beta] + \dot{H}_S\sin\alpha\cos\beta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-R^V_{Y2} = {} & (J_O + J_I\cos^2\beta + K_I\sin^2\beta)(\ddot{\alpha} + \dot{\omega}_y) + (K_I - J_I)(\dot{\alpha} + \omega_y)\,\dot{\beta}\sin 2\beta \\
& + (J_I - K_I)\sin\beta\cos\beta\,(\dot{\omega}_x\sin\alpha + \dot{\omega}_y\cos\alpha) + (\omega_x\cos\alpha - \omega_z\sin\alpha)\times \\
& \times [(K_I - J_I)\,\omega_y\sin\beta\cos\beta + (I_O - K_O + I_I - J_I\sin^2\beta - K_I\cos^2\beta)(\omega_x\sin\alpha + \omega_z\cos\alpha)] \\
& + [I_I + (J_I - K_I)\cos 2\beta]\,(\omega_x\sin\alpha + \omega_z\cos\alpha)\,\dot{\beta} \\
& - H_S\cos\beta\,(\dot{\beta} + \omega_x\cos\alpha - \omega_z\sin\alpha) - \dot{H}_S\sin\beta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-R^V_{Z2} = {} & -I_I\,\ddot{\beta}\sin\alpha + (J_I - K_I)(\ddot{\alpha} + \dot{\omega}_y)\cos\alpha\sin\beta\cos\beta + \dot{\omega}_z\,[(I_O + I_I)\sin^2\alpha \\
& + (K_O + J_I\sin^2\beta + K_I\cos^2\beta)\cos^2\alpha] + \dot{\omega}_x\sin\alpha\cos\alpha\,[K_O + J_I\sin^2\beta + K_I\cos^2\beta \\
& - I_O - I_I] + \dot{\alpha}\,\omega_z\,[I_O - K_O + I_I - K_I\cos^2\beta - J_I\sin^2\beta]\sin 2\alpha \\
& + \dot{\alpha}\,\omega_x\,[J_O + J_I + (K_O + K_I - I_O - I_I)\cos 2\alpha + 2(K_I - J_I)\sin^2\alpha\sin^2\beta] \\
& - (\dot{\alpha} + \omega_y)\,\beta\,[I_I + (K_I - J_I)\cos 2\beta]\cos\alpha + (J_I - K_I)(\omega_x\sin\alpha + \omega_y\cos\alpha)\,\dot{\beta}\cos\alpha\sin 2\beta \\
& - (\dot{\alpha} + \omega_y)^2(J_I - K_I)\sin\alpha\sin\beta\cos\beta + \omega_x^2(J_I - K_I)\sin\alpha\sin\beta\cos\beta \\
& + \omega_x\,\omega_z(J_I - K_I)\cos\alpha\sin\beta\cos\beta \\
& + \omega_y\,\omega_z(I_O + I_I - K_O - K_I\cos^2\beta - J_I\sin^2\beta)\sin\alpha\cos\alpha \\
& + \omega_x\,\omega_y\,[J_O + J_I - (K_O + K_I)\sin^2\alpha - (I_O + I_I)\cos^2\alpha + (K_I - J_I)\sin^2\beta(1 + \sin^2\alpha)] \\
& - H_S\,[(\dot{\alpha} + \omega_y)\sin\alpha\cos\beta + \dot{\beta}\cos\alpha\sin\beta + \omega_x\sin\beta] + \dot{H}_S\cos\alpha\cos\beta
\end{aligned}
$$

De la même façon que précédemment, les équations de mouvement des armatures sont données en écrivant que :

$$
\begin{cases}
T_{mx2} = -R^{OG2}_{x2} + F_{x2} \\
T_{my1} = -R^{OG2}_{y2} + F_{y2}
\end{cases}
$$

en ajoutant pour le gyroscope à 3 degrés de liberté une 3e équation :

$$
T_{mz2} = -R^{IG2}_{z2} + F_{z2}
$$

Les équations des deux gyroscopes font intervenir, on le voit, beaucoup de termes dont l'ordre de grandeur est très différent. Dans la plupart des applications, on peut en négliger beaucoup : ainsi dans notre cas, tous les termes du type $\omega_x\,\omega_y$, $\omega_y\,\omega_z$, $\omega_z\,\omega_x$ puisqu'il s'ajoutent aux termes analogues des équations d'Euler du satellite, qui sont déjà négligeables dans notre application, car les vitesses angulaires du satellite sont petites. On peut aussi négliger tous les termes comportant $\dot{\omega}_x$, $\dot{\omega}_y$ et $\dot{\omega}_z$: ils s'ajoutent aux termes $I_x\,\dot{\omega}_x$, $I_y\,\dot{\omega}_y$ et $I_z\,\dot{\omega}_z$ des équations du satellite, mais les moments d'inertie qu'ils ajoutent à I_x, I_y et I_z sont négligeables devant ceux-ci.

On peut encore négliger les termes du type « produit d'une vitesse angulaire d'une armature par une vitesse angulaire du satellite » : ces termes sont généralement petits devant les couples de précession des gyroscopes.

ANNEXE 4

LES GYROSCOPES DE COMMANDE DE MOMENT CINÉTIQUE A TROIS DEGRÉS DE LIBERTÉ

La fiabilité de notre système de commande d'attitude peut être améliorée si nous prévoyons la possibilité d'utiliser chacun des deux gyroscopes en gyroscope à 3 degrés de liberté. Le 3^{e} degré de liberté est obtenu en agissant sur la vitesse angulaire du rotor du gyroscope.

Pour pouvoir utiliser correctement ce 3^{e} degré de liberté, la vitesse angulaire nominale du rotor ne devra pas être trop grande, mais assez grande cependant pour permettre d'utiliser efficacement les deux autres degrés de liberté. La détermination précise de cette vitesse optimale doit se faire en tenant compte des couples perturbateurs sur chacun des 3 axes du satellite.

Ainsi, si nous supposons que ces couples sont égaux en moyenne sur les trois axes, le gyroscope pourra échanger au plus 1,3 N-m-s sur chacun des 3 axes, c'est-à-dire qu'il pourra compenser un couple perturbateur de $1{,}6 \times 10^{-4}$ N-m en moyenne pendant une orbite et demie, à la condition toutefois d'utiliser totalement le moment cinétique emmagasiné grâce à une loi de découplage des axes. La désaturation des gyroscopes devra donc être deux fois plus fréquente que dans le cas des deux gyroscopes à 2 degrés de liberté que nous avons étudiés dans les chapitres 4 et 5 et la vitesse nominale optimum du rotor est égale aux deux tiers de sa vitesse maximum.

Loi de découplage des axes

Puisque nous devons agir sur les 3 axes du satellite et que notre gyroscope a 3 degrés de liberté, la recherche de la loi de découplage ne pose pas beaucoup de problèmes. Nous ne considérerons ici que le cas du gyroscope 1 de la configuration étudiée (Figure 29).

Les équations des couples de réaction du gyroscope 1 sur le satellite sont données en détail par les équations (A.3.12). Si nous éliminons tous les termes petits et négligeables, elles s'écrivent :

$$\begin{cases} R_{X1} = H_S\,[(\dot{\alpha} + \omega_z)\sin\alpha\cos\beta + \dot{\beta}\cos\alpha\sin\beta + \omega_z\sin\beta] - \dot{H}_S\cos\alpha\cos\beta \\ R_{Y1} = -H_S\,[(\dot{\alpha} + \omega_z)\cos\alpha\cos\beta - \dot{\beta}\sin\alpha\sin\beta + \omega_x\sin\beta] - \dot{H}_S\sin\alpha\cos\beta \\ R_{Z1} = H_S\cos\beta\,(\dot{\beta} - \omega_x\sin\alpha + \omega_y\cos\alpha) + \dot{H}_S\sin\beta \end{cases}$$

c'est à dire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} R^V_{X1} \\ R^V_{Y1} \\ R^V_{Z1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\cos\beta \\ -\cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_S\,\dot{\alpha} \\ H_S\,\dot{\beta} \\ \dot{H}_S \end{pmatrix}$$

$$+ H_S \begin{pmatrix} 0 & \sin\beta & \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\beta & 0 & -\cos\alpha\cos\beta \\ -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

ou encore :

$$\begin{pmatrix} R_{X1}^V \\ R_{Y1}^V \\ R_{Z1}^V \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} H_S\,\dot{\alpha} \\ H_S\,\dot{\beta} \\ \dot{H}_S \end{pmatrix} + H_S\,B_1 \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

On pourra donc écrire $\begin{pmatrix} R_{X1}^V \\ R_{Y1}^V \\ R_{Z1}^V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$, si on a la relation :

$$\begin{pmatrix} H_S\,\dot{\alpha} \\ H_S\,\dot{\beta} \\ \dot{H}_S \end{pmatrix} = A_1^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} - H_S\,A_1^{-1}\,B_1 \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

ou A_1^{-1} est la matrice inverse de A_1.

Si nous explicitions A_1^{-1} et $A_1^{-1}\,B_1$, et si nous posons $H_S = I_g\,\omega_S$, cette relation matricielle devient :

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dfrac{I_g}{H_S}\,\dot{\omega}_S \end{pmatrix} = \frac{1}{H_S} \begin{pmatrix} \dfrac{\sin\alpha}{\cos\beta} & -\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} & 0 \\ \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\beta \\ -\cos\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\cos\beta & \sin\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta & \sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta & 1 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

On voit ainsi qu'on peut découpler assez simplement les trois axes sauf si $\cos\beta = 0$ (cas que nous avons déjà évité pour les gyroscopes à 2 degrés de liberté). A tout vecteur erreur $\bar{\varepsilon}$, il est possible d'associer un vecteur unique de commande :

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dfrac{I_g}{H_S}\,\dot{\omega}_S \end{pmatrix}$$

Ce mode d'utilisation des gyroscopes est la synthèse de la stabilisation et de la commande d'attitude par gyroscopes de commande de moment cinétique et de la stabilisation et la commande d'attitude par roues d'inertie.

RÉFÉRENCES

[1] Arnulf, A. Bricard, J. — *Acta Electron.*, *5*, 1963, pp. 409-425.

[2] Allen, C. W. — *Astrophysical Quantities*, Univ. of London, The Athlone Press, 2nd ed., 1963, p. 102.

[3] Johnson, H. L. — *Science*, *157*, August 1967, p. 635.

[4] Neugebauer, G. Leighton, R. B. — *Scient. Am.*, August 1968, p. 50.

[5] Connes, J. — Thèse « *Recherches sur la spectroscopie par transformation de Fourier* », Éd. de la Revue d'Optique, 1961, p. 6.

[6] Surdin, M. Flandrois, J. — *Sci. Ind. Spatiales*, *6*, 1970, pp. 13-14.

[7] Jacquinot, P. — *Rep. Prog. Phys.*, *23*, 1960, pp. 276-278 et 297.

[8] Cooley, J. W. Tukey, J. W. — *Math. Comput.*, *19*, 1965, p. 297.

[9] Forman, M. L. — *J. Phys.*, *28*, Suppl. 3-4, 1967, p. C2-58.

[10] Clark, D. D. — (communication privée 1969).

[11] Connes, J. — Thèse *op. cit.*, pp. 15-21.

[12] Connes, J. — Thèse *op. cit.*, p. 47.

[13] Connes, J. — Thèse *op. cit.*, pp. 68-69.

[14] Pinard, J. — Thèse 3^{e} cycle, Paris, 1963.

[15] Pinard, J. — *J. Phys.*, *28*, Suppl. 3-4, 1967, p. C2-136.

[16] Peck, E. R. — *J. Opt. Soc. Am.*, *38*, 1948, p. 1015.

[17] Lefranc, M. C. — *Acta Electron.*, *9*, pp. 48-49.

[18] Dauguet, A. — *La détection des radiations infrarouges et ses applications*, éd. Dunod, Paris, 1964.

[19] Gross, U. E. Weinstein, A. I. — *Infrared Phys.*, *4*, 1964, p. 165.

[20] Arnold, R. N. Maunder, L. — *Gyrodynamics and its engineering applications*, Academic Press, 1961, p. 396.

[21] Haskell, P. — Control and stabilisation of spacecraft, in vol. III *Active control systems*, *ESRO SP-18*, 1967, p. 67.

[22] Day, B. P. — Control and stabilisation of spacecraft, in vol. III *Active control systems*, *ESRO SP-18*, 1967, p. 93.

[23] Allen, C. W. — *Astrophysical Quantities*, Univ. of London, The Athlone Press, 2nd ed., 1963, p. 168.

[24] Barnes, M. B. — Control and stabilisation of spacecraft, in vol. III *Active control systems*, *ESRO SP-18*, 1967, pp. 39-40.

[25] Sabroff, A. E. — *J. Spacecraft Rockets*, *5*, 1968, pp. 1377-1392.

[26] Jacot, A. D. Liska, D. J. — *J. Spacecraft Rockets*, *3*, 1966, p. 1314 (ou AIAA 65-405).

[27] Arink, G. J. A. — Gyroscopic attitude control systems for astronomical satellites, *ESRO SN-90*, 1968.

[28] Liska, D. J. — *J. Spacecraft Rockets*, *5*, 1968, pp. 75-78.

[29] Hawker Siddeley Dynamics Ltd — Control moment gyro applications to spacecraft attitude control and stabilities, *HSD TP 7207*, August 1970.

[30] O'Connor, B. J. Morine, L. A. — *J. Spacecraft Rockets*, *6*, 1969, p. 226 (ou AIAA 67-579).

[31] Chubb, W. B. Epstein, M. — Application of control moment gyros in the attitude control of the Apollo Telescope Mount, *AIAA Paper 68-866*.

Imprimé en France par :
Union Parisienne d'Imprimeries
13, rue Y.-Toudic — 75 PARIS Xe

Dépôt légal effectué : N° 711203 - 2e trimestre 1972.

Vu et Approuvé
Talence, le 7 avril 1972

Pour le Président de l'UNIVERSITE
Le Vice-Président

M. V. Jucquois